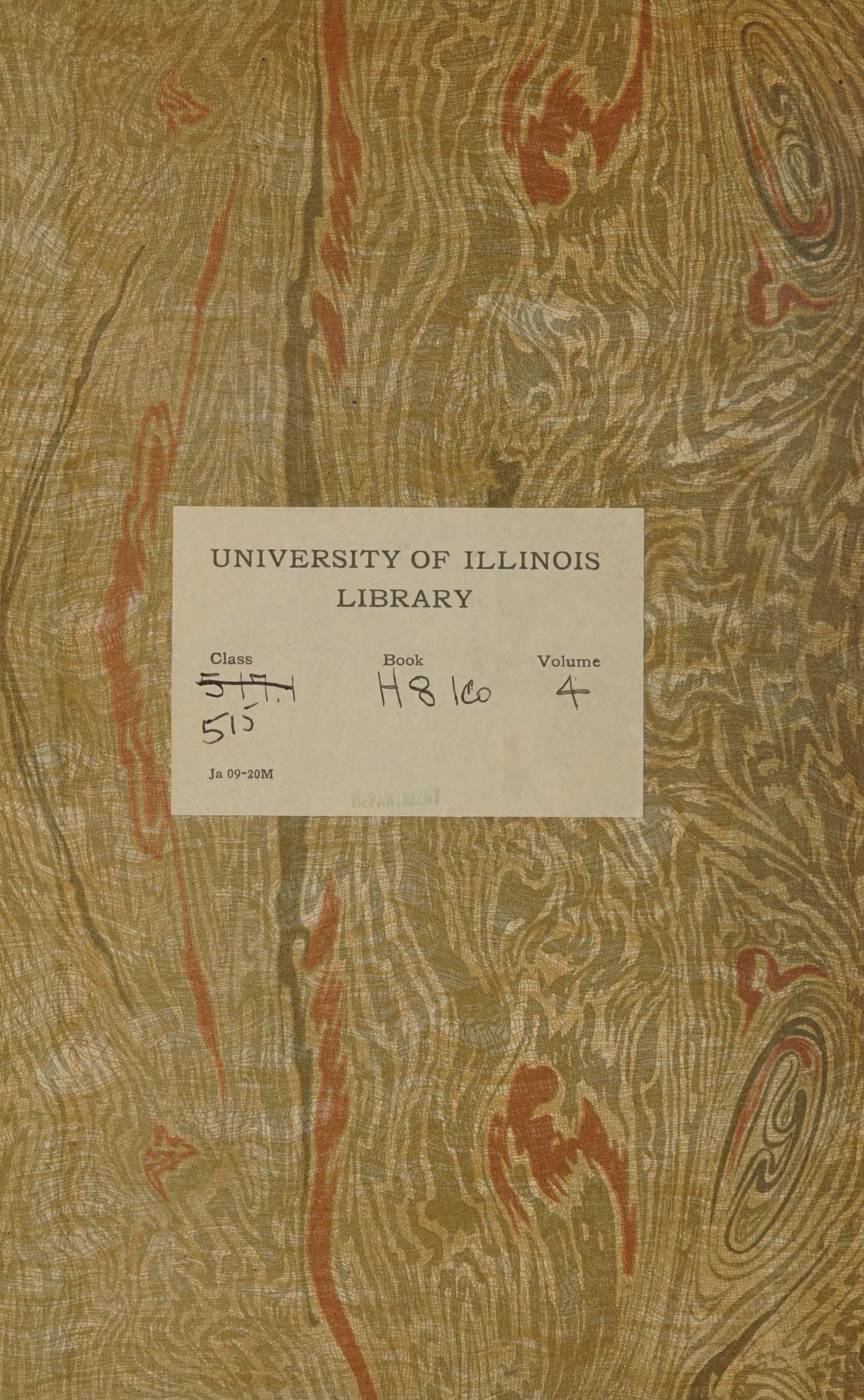


UNIVERSITY OF ILLINOIS
LIBRARY
Class
517.1
515
Book
H8 Ico
Volume
4
Ja 09-20M



COURS

DE

CALCUL INFINITÉSIMAL.

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS,
Quai des Augustins, 55.

COURS

DE

CALCUL INFINITÉSIMAL,

Par J. HOÜEL,

Professeur de Mathématiques pures à la Faculté des Sciences de Bordeaux.

TOME QUATRIÈME.



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, 55.

1881

AVERTISSEMENT.

Le quatrième Volume, qui paraît aujourd'hui, comprend à peu près les matières ajoutées au programme d'examen de la Licence ès Sciences mathématiques à l'époque où le Tome I venait d'être mis sous presse.

Cette partie complémentaire, qui forme le Livre VI de l'Ouvrage, et dont le commencement se trouve déjà dans le Volume précédent, a été rédigée pendant le cours de l'impression, à l'aide des matériaux dont je pouvais disposer et à peu près suivant le plan annoncé à la fin de la *Préface* du Tome I.

Elle se compose de quatre Chapitres, dont les deux premiers sont la reproduction presque textuelle de la deuxième Partie de ma *Théorie élémentaire des quantités complexes,* publiée en 1868. J'ai seulement ajouté, à la suite du paragraphe qui traite du développement des fonctions synectiques en séries périodiques, un nouveau paragraphe contenant la démonstration de la série de Fourier, d'après Dirichlet. Il m'a semblé utile de rapprocher ces deux développements, de forme identique en apparence, mais de nature si différente, et fondés sur de tout autres principes.

Le Chapitre III a pour objet l'étude des fonctions multiformes, dont j'ai trouvé les éléments dans la *Théorie des fonctions doublement périodiques* de MM. Briot et Bouquet, et surtout dans le Mémoire de M. Ed. Weyr, cité dans ma Préface [1]. J'y traite en particulier, avec développement, la théorie de l'inversion des inté-

---

[1] *Zur Theorie der elliptischen Functionen;* Prag, 1876.

grales à périodes, en prenant pour exemples les intégrales circulaires et elliptiques.

Le quatrième et dernier Chapitre est consacré à l'étude spéciale des fonctions elliptiques. Après avoir exposé la réduction des intégrales elliptiques aux formes normales et les conséquences immédiates du théorème d'addition, je donne, en suivant la marche tracée par MM. Briot et Bouquet, les décompositions des fonctions elliptiques en séries de fractions simples et en produits infinis, les propriétés des fonctions que ces auteurs représentent par $\Theta_n(u)$, et qui sont, à des facteurs constants près, les fonctions $\vartheta_n(x)$ de Jacobi, puis le développement des fonctions elliptiques en séries trigonométriques. J'établis ensuite, d'après Gudermann, la transformation de Landen, avec ses applications au calcul numérique des fonctions elliptiques.

Je termine par l'exposition des propriétés les plus importantes des intégrales elliptiques de deuxième et de troisième espèce, et je donne, dans le dernier paragraphe, des Tables abrégées pour le calcul numérique des fonctions elliptiques, avec une courte instruction sur leur usage.

Dans tout ce Chapitre, j'ai fait usage de la notation de Gudermann, qui m'a semblé la plus courte et la plus commode, et qui est déjà adoptée par un grand nombre de géomètres.

J'aurais désiré faire suivre ce Livre VI d'un recueil d'exercices, comme je l'avais fait pour les Livres précédents ; mais je n'ai pu trouver encore le loisir nécessaire à l'exécution de ce travail, pour lequel je n'avais pas à ma portée les mêmes secours que pour les autres recueils. J'espère pouvoir combler bientôt cette lacune en ajoutant au Tome IV un Supplément, qui contiendra des exercices sur les diverses théories exposées dans le Livre VI et sur les principales applications des fonctions elliptiques.

J. H.

Bordeaux, janvier 1881.

COURS

DE

CALCUL INFINITÉSIMAL.

LIVRE SIXIÈME.

THÉORIE DES FONCTIONS D'UNE VARIABLE COMPLEXE. APPLICATIONS A LA THÉORIE DES FONCTIONS ELLIPTIQUES.

(Suite.)

CHAPITRE II.

APPLICATIONS DES THÉORIES PRÉCÉDENTES.

---

§ I.

DÉTERMINATION DU NOMBRE DES RACINES D'UNE ÉQUATION COMPRISES DANS UNE AIRE DONNÉE.

1167. Nous avons vu [1164] que, dans l'étendue d'une aire $\mathfrak{A}$, l'excès M du nombre des zéros d'une fonction uniforme $f(z)$ sur le nombre de ses infinis est égal au résidu intégral de la fonction $D_z \log f(z)$ relatif à l'aire $\mathfrak{A}$, c'est-à-dire à l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{A}} d\log f(z).$$

Désignons par la caractéristique Δ l'accroissement d'une fonc-

tion non uniforme, représentée par une intégrale, lorsque cette intégrale est prise tout le long du contour de $\mathfrak{A}$. D'après cela, en représentant par z_0 la valeur de la variable z en un point du contour, par z_1 la valeur de la variable au même point lorsqu'on a fait croître son argument de 2π, de sorte que

$$z_0 = re^{ip}, \quad z_1 = re^{i(p+2\pi)},$$

et par F_0, F_1 les valeurs correspondantes de la fonction multiforme $F(z)$, on aura

$$\int_{\mathfrak{A}} dF = \Delta F = F_1 - F_0.$$

On trouve ainsi, en particulier,

$$\int_{\mathfrak{A}} \frac{df(z)}{f(z)} = \log\frac{f_1}{f_0} = \Delta \log f,$$

et de plus

$$\int_{\mathfrak{A}} \frac{dz}{z} = \log\frac{z_1}{z_0} = \Delta \log z = 2\pi i.$$

Donc la valeur de l'indice intégral relatif à l'aire $\mathfrak{A}$ pourra se mettre sous la forme

$$M = \frac{\Delta \log f}{\Delta \log z}.$$

Cette expression de la différence entre les nombres de racines des équations

$$f = 0, \quad f = \infty$$

a reçu de Cauchy le nom de *compteur logarithmique*.

1168. Supposons, par exemple, que f soit un polynôme entier du degré n,

$$f = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n = z^n\left(a_0 + \frac{a_1}{z} + \cdots + \frac{a_n}{z^n}\right).$$

Il est clair que l'équation $f = \infty$ ne peut avoir de racines finies. Donc la somme M ne contient aucun indice négatif, et, par suite, elle est égale au nombre des racines de l'équation $f = 0$. Prenons

pour $\mathfrak{A}$ un cercle aussi grand que l'on voudra. Nous aurons

$$\log f = n \log z + \log\left(a_0 + \frac{\varkappa}{z}\right),$$

$\varkappa$ désignant une quantité qui ne devient pas infinie pour $z = \infty$. Donc

$$\Delta \log f = n \Delta \log z + \Delta \log\left(a_0 + \frac{\varkappa}{z}\right),$$

d'où

$$\frac{\Delta \log f}{\Delta \log z} = n + \frac{\Delta \log\left(a_0 + \frac{\varkappa}{z}\right)}{\Delta \log z}.$$

Or, pour z assez grand, le module de $\frac{\varkappa}{z}$ devient inférieur à celui de a_0, d'où il résulte que $\log\left(a_0 + \frac{\varkappa}{z}\right)$ reprend sa valeur primitive, lorsque z a parcouru la circonférence entière ([1]).

Donc

$$\Delta \log\left(a_0 + \frac{\varkappa}{z}\right) = \Delta \log a_0 = 0,$$

et, par conséquent,

$$\frac{\Delta \log f}{\Delta \log z} = n.$$

L'équation $f = 0$ a donc n racines. Ainsi nous obtenons encore

---

([1]) Soient, en effet, mod. $\frac{v}{u} < 1$, $\frac{v}{u} = re^{ip}$, r étant < 1. On a

$$\Delta \log(u + v) = \Delta \log u + \Delta \log\left(1 + \frac{v}{u}\right),$$

$$1 + \frac{v}{u} = 1 + re^{ip} = \rho e^{i\varphi},$$

$$1 + r\cos p = \rho \cos\varphi.$$

Puisque r est < 1, $1 + r\cos p$ sera toujours positif, ainsi que $\cos\varphi$. Donc l'argument φ de $1 + \frac{v}{u}$ ne croît pas d'une circonférence, et par suite $\log\left(1 + \frac{v}{u}\right)$ reprend sa valeur primitive, après que z a parcouru le contour de $\mathfrak{A}$. Donc

$$\Delta \log\left(1 + \frac{v}{u}\right) = 0, \quad \text{et} \quad \Delta \log(u + v) = \Delta \log u.$$

On peut donc, dans la somme $u + v$, négliger, pour le calcul de $\Delta \log(u + v)$, la partie v dont le module est moindre que celui de u.

une nouvelle démonstration du théorème fondamental de la théorie des équations.

1169. On peut énoncer d'une autre manière le théorème du n° 1165. Soit

$$f(z) = u + iv = \mathrm{R}e^{i\mathrm{P}},$$

d'où

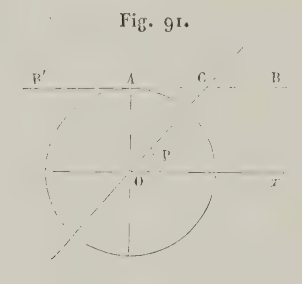
$$u = \mathrm{R}\cos\mathrm{P},\quad v = \mathrm{R}\sin\mathrm{P},\quad \frac{u}{v} = \cot\mathrm{P}.$$

Lorsque la variable z a fait le tour de l'aire $\mathfrak{A}$, $f(z)$ reprenant sa valeur, $\log f(z)$ a crû d'un multiple de $2\pi i$, et nous avons vu que cet accroissement $\Delta \log z$ est égal à $2\pi i$ multiplié par l'excès M du nombre des zéros sur le nombre des infinis.

Il s'ensuit de là que $\log f(x) = \log\mathrm{R} + i\mathrm{P}$ croît de $2\mathrm{M}\pi i$, et, par conséquent, l'argument P croît de $2\mathrm{M}\pi$.

Considérons maintenant (*fig.* 91) une droite indéfinie dans les deux sens, mobile autour du centre du cercle sur lequel se mesurent les angles, et tournant dans un sens quelconque. Chaque

Fig. 91.



fois que l'une ou l'autre des directions de la droite passera par le point A, la droite ayant décrit un angle $\mathrm{P} = \frac{\pi}{2} + k\pi$, la cotangente de cet angle P, représentée par la ligne AC, s'annulera. De plus, elle s'annulera en passant d'une valeur positive à une valeur négative si à ce moment l'angle P va en croissant, et, au contraire, elle s'annulera en passant d'une valeur négative à une valeur positive si l'angle P va en décroissant.

Si à la fin du mouvement l'angle P a repris sa valeur primitive, la droite OC aura dû passer par le point A autant de fois en allant

de droite à gauche qu'en allant de gauche à droite. Si l'angle P a crû de π, OC aura dû passer par A une fois de plus en allant de droite à gauche que de gauche à droite. Si l'angle P a crû de $2M\pi$, OC aura passé $2M$ fois de plus par A de droite à gauche que de gauche à droite. Donc $\cot P$ se sera annulé $2M$ fois de plus en passant du positif au négatif qu'en passant du négatif au positif.

Donc, lorsque l'argument P de $f(z)$ croîtra de $2M\pi$, la quantité $\frac{u}{v} = \cot P$ s'annulera $2M$ fois de plus en passant du positif au négatif qu'en passant du négatif au positif.

Si donc on pose

$$f(z) = u + iv,$$

et qu'en faisant parcourir à z le contour entier d'une aire $\mathfrak{A}$ on compte combien de fois le rapport $\frac{u}{v}$ s'annule en passant du positif au négatif, et combien de fois il s'annule en passant du négatif au positif, l'excès du premier nombre de fois sur le second sera le double de l'excès du nombre des racines de l'équation $f(z) = 0$ comprises dans l'aire $\mathfrak{A}$ sur le nombre des racines de l'équation $f(z) = \infty$ comprises dans la même aire.

Si la fonction $f(z)$ n'a aucun infini à l'intérieur de $\mathfrak{A}$, l'excès en question sera précisément égal au double du nombre des racines de l'équation $f(z) = 0$ contenues dans $\mathfrak{A}$.

1170. Soit, en particulier, une fonction rationnelle et entière

$$f(z) = a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \ldots + a_m.$$

Cette fonction ne deviendra pas infinie pour des valeurs finies de z. Prenons pour contour un cercle de rayon infiniment grand r. Le premier terme $a_0 z^m$ deviendra infiniment grand par rapport à la somme de tous les autres, et l'on pourra poser, ε étant infiniment petit,

$$f(z) = a_0 r^m e^{mip}(1 + \varepsilon).$$

Soit maintenant

$$a_0 = \lambda e^{i\theta}.$$

On aura, à des quantités près infiniment petites par rapport à celles que l'on conserve,

$$u = \lambda r^m \cos(mp + \theta), \quad v = \lambda r^m \sin(mp + \theta),$$

d'où, à un infiniment petit près,

$$\frac{u}{v} = \cot(mp + \theta).$$

Si maintenant z fait le tour du cercle, p croîtra de 2π, et $mp + \theta$ de $2m\pi$. Donc $\cot(mp + \theta)$ s'annulera $2m$ fois en passant du positif au négatif, sans jamais s'annuler en passant du négatif au positif. Donc l'équation $f(z) = 0$ a m racines dans l'intérieur du cercle infini.

1171. Pour déterminer la différence $\nu - \nu'$ entre le nombre de fois ν que $\frac{u}{v}$, en s'annulant, passe du $+$ au $-$ et le nombre de fois ν' qu'il passe du $-$ au $+$ tandis que z parcourt le contour de $\mathfrak{A}$, Sturm a fait connaître le procédé suivant, qui est une extension de celui qu'il avait donné pour le cas des racines réelles.

Prenons pour contour de $\mathfrak{A}$ une ligne qui se compose de parties C, C', ..., sur chacune desquelles x et y soient exprimés en fonctions rationnelles d'une troisième variable t. Pour chaque partie, u et v seront exprimés également en fonctions rationnelles de t, de sorte que le rapport $\frac{u}{v}$ se changera dans le rapport $\frac{U}{V}$ de deux fonctions entières de t. Le problème se ramènera alors à trouver la différence $\nu - \nu'$ pour chacune des parties C du contour. La somme de toutes ces valeurs donnera le nombre $2M$.

Divisons maintenant U par V, puis V par le reste $-V_1$ de la première division, puis V_1 par le reste $-V_2$ de la seconde division, et ainsi de suite [1]. On finira par arriver à un reste constant $-V_n$; car U et V, ne s'annulant pas à la fois sur le contour, n'ont pas de facteur commun. Soient maintenant, dans le sens des mouvements positifs, a et b les extrémités initiale et finale de la portion de contour C. Alors $\nu - \nu'$ sera égal à l'excès du nombre des variations que la suite

$$U, \; V, \; V_1, \; \ldots, \; V_n$$

---

[1] Si U est de degré inférieur à celui de V, le reste de la division de U par V sera U, et l'on prendra $V_1 = -U$.

présente au point b sur le nombre des variations que la même suite présente au point a.

La démonstration est la même que pour le théorème relatif aux racines réelles. On fait voir qu'un changement de signe de l'une des quantités $V, V_1, \ldots$ n'a pas d'influence sur le nombre des variations. U et V ne peuvent pas changer de signe en même temps. Donc, si $u = 0$ pour $t = c$, on aura à considérer les cas suivants, ε désignant un accroissement compté positivement de a vers b :

	U	V	U	V	U	V	U	V
$c - \varepsilon$	+	+	+	—	—	+	—	—
$c + \varepsilon$	—	+	—	—	+	+	+	—

Dans le premier et le quatrième cas, $\frac{U}{V}$ passe de + à —; donc, dans le passage par le point c, ν augmente d'une unité, et en même temps il se produit une variation de plus, de sorte que l'accroissement du nombre des variations donne bien l'accroissement de $\nu - \nu'$.

Dans le deuxième et le troisième cas, $\frac{U}{V}$ passe de — à +, ν' croît d'une unité, et par suite $\nu - \nu'$ diminue d'une unité. Mais en même temps le nombre des variations diminue aussi d'une unité. Donc le théorème continue à subsister. Or, comme il ne peut y avoir de changement dans le nombre des variations que lorsqu'on passe par un point c, le théorème est complétement démontré.

1172. Pour mettre en pratique cette méthode, prenons pour contour celui d'un rectangle dont les côtés soient parallèles aux axes coordonnés, et qui ait pour abscisses extrêmes x_0 et X et pour ordonnées extrêmes y_0 et Y, en supposant

$$x_0 < X, \quad y_0 < Y.$$

Le contour se composera de quatre parties :

C	correspondant à	$y = y_0$,	depuis	$x = x_0$	jusqu'à	$x = X$;
C′	»	$x = X$,	»	$y = y_0$	»	$y = Y$;
C″	»	$y = Y$,	»	$x = X$	»	$x = x_0$;
C‴	»	$x = x_0$,	»	$y = Y$	»	$y = y_0$.

Ainsi, dans chacune des quatre portions, U et V ne dépendront que d'une seule variable, savoir, de x pour C et C'', de y pour C' et C'''.

Si l'on veut obtenir toutes les racines d'une équation, on emploiera d'abord la méthode connue de Sturm pour trouver les racines réelles

$$z = a_1, \quad z = a_2, \quad \ldots, \quad z = a_k.$$

On divisera ensuite $f(z)$ par le produit

$$(z - a_1)(z - a_2)\ldots(z - a_k),$$

ce qui donnera une équation $\varphi(z) = 0$ qui n'aura plus de racines réelles situées sur l'axe des x. On prendra ensuite cet axe lui-même pour un des côtés du rectangle. En faisant d'abord

$$x_0 = -\infty, \quad y_0 = 0, \quad X = +\infty, \quad Y = +\infty,$$

on obtiendra le nombre des racines complexes $x + iy$ pour lesquelles le coefficient y de i est positif; puis, en faisant

$$x_0 = -\infty, \quad y_0 = -\infty, \quad X = +\infty, \quad Y = 0,$$

on trouvera de même le nombre des racines complexes dans lesquelles le coefficient de i est négatif.

On partagera ensuite le plan en bandes par des parallèles à l'axe des x; puis on subdivisera, par des parallèles à l'axe des y, chacune des bandes qui renfermeront des racines. De cette manière, les racines se trouveront resserrées dans des limites assez étroites pour qu'on leur applique la méthode d'approximation de Newton.

Ici, comme dans la recherche des racines réelles, il n'est pas absolument nécessaire que l'équation soit réduite à n'avoir plus que des racines simples. Cependant il y a naturellement avantage à commencer par l'application de la méthode des racines multiples, afin d'avoir à opérer sur une équation plus simple.

Il est facile de déterminer les racines imaginaires pures, qui sont les racines communes aux deux équations

$$u(0, y) = 0, \quad v(0, y) = 0,$$

et qui s'obtiendront en égalant à zéro le facteur commun à ces deux équations. Après avoir supprimé ces racines, on partagera le plan en quatre parties correspondantes aux quatre angles des axes coordonnés.

§ II.

DÉVELOPPEMENT DES FONCTIONS SYNECTIQUES EN SÉRIES PÉRIODIQUES.

1173. Du théorème de Laurent, démontré au nº **1148**, il résulte que, si $f(z)$ est une fonction synectique de z, dans l'intervalle compris entre deux cercles concentriques de centre c et de rayons R_0 et R_1, on pourra développer $f(z)$ en une série convergente suivant les puissances entières, positives et négatives, de la différence $z-c$. On aura de cette manière

$$f(z) = a_0 + a_1(z-c) + a_2(z-c)^2 + \ldots \\ + a_{-1}(z-c)^{-1} + a_{-2}(z-c)^{-2} + \ldots,$$

ou, en posant $z - c = re^{ip}$,

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} f(c+re^{ip}) = a_0 + a_1 re^{ip} + a_2 r^2 e^{2ip} + \ldots \\ + a_{-1} r^{-1} e^{-ip} + a_{-2} r^{-2} e^{-2ip} + \ldots, \end{aligned} \right.$$

le coefficient a_n d'indice quelconque étant donné par la formule générale

$$(2) \qquad a_n = \frac{1}{2\pi\rho^n} \int_0^{2\pi} f(c+\rho e^{i\varphi}) e^{-ni\varphi} d\varphi,$$

où ρ représente une constante positive quelconque comprise entre R_0 et R_1.

Si dans le second membre de (1) on remplace l'argument p par $p + 2k\pi$, k étant un nombre entier arbitraire, ce second membre ne changera point de valeur. Donc, ce second membre est une fonction *périodique* de l'angle p, et, par conséquent, il doit en être de même du premier membre tant que l'égalité (1) subsistera. C'est d'ailleurs ce qui résulte immédiatement de la supposition de l'uniformité de la fonction $f(z)$ dans l'intérieur de l'aire considérée; car, de ce que l'on a

$$c + re^{ip} = c + re^{i(p+2k\pi)},$$

il résulte alors que

$$f(c+re^{ip}) = f(c+re^{i(p+2k\pi)}),$$

c'est-à-dire que, si l'on considère dans $f(c+re^{ip})$ l'argument p

comme seul variable, et qu'à ce point de vue on représente cette fonction par $F(p)$, on aura

$$F(p) = F(p + 2k\pi).$$

Ainsi une fonction synectique d'une variable complexe re^{ip} de module r constant est toujours une fonction périodique de l'argument p de la variable, la période étant 2π [366].

1174. On peut donner au développement (1) la forme d'une série *trigonométrique,* en remplaçant les exponentielles imaginaires par leurs valeurs en cosinus et sinus, et, si l'on pose

$$a_0 = \frac{1}{2}\alpha_0, \quad a_n r^n + a_{-n} r^{-n} = \alpha_n, \quad i(a_n r^n - a_{-n} r^{-n}) = \beta_n,$$

il vient

$$\begin{aligned} F(p) = \frac{1}{2}\alpha_0 + \alpha_1 \cos p + \alpha_2 \cos 2p + \ldots \\ + \beta_1 \sin p + \beta_2 \sin 2p + \ldots . \end{aligned}$$

On voit aisément que, si $F(p)$ est une fonction *paire* de p [288], le développement devra se réduire à sa première ligne et ne contenir que des cosinus. Si, au contraire, $F(p)$ est une fonction *impaire* de p, le développement se réduira à sa seconde ligne et ne contiendra que des sinus.

1175. Dans le cas où le module r est constant, on peut le supposer, ainsi que ρ, égal à l'unité. La formule (1) devient alors

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} F(p) = a_0 + a_1 e^{ip} + a_2 e^{2ip} + \ldots \\ + a_{-1} e^{-ip} + a_{-2} e^{-2ip} + \ldots, \end{aligned} \right.$$

la valeur générale d'un coefficient de cette série étant

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\varphi) e^{-ni\varphi} d\varphi.$$

Le terme général de la série peut s'écrire, en faisant passer le facteur e^{nip} sous le signe d'intégration,

$$ae^{nip} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\varphi) e^{ni(p-\varphi)} d\varphi.$$

En réunissant les termes qui correspondent à des indices égaux

et de signes contraires, leur somme deviendra

$$a_n e^{nip} + a_{-n} e^{-ipn} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{F}(\varphi) \cos n(p-\varphi)\, d\varphi.$$

Donc le développement d'une fonction de e^{ip}, synectique pour toute valeur de l'angle p et périodique par rapport à cet angle, la période étant 2π, sera de la forme

$$(4) \quad \mathrm{F}(p) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{F}(\varphi)\, d\varphi + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{n=\infty} \int_0^{2\pi} \mathrm{F}(\varphi) \cos n(p-\varphi)\, d\varphi.$$

Si l'on remplace dans (3) les exponentielles imaginaires par leurs valeurs en cosinus et sinus, ou, ce qui revient au même, si l'on développe, dans chaque terme de (4), la valeur de $\cos n(p-\varphi)$, on aura une série de la forme de celle du n° **1174**, où les coefficients α_n, β_n auront pour valeurs

$$\alpha_n = \quad a_n + a_{-n} \quad = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{F}(\varphi) \cos n\varphi\, d\varphi,$$

$$\beta_n = i(a_n - a_{-n}) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{F}(\varphi) \sin n\varphi\, d\varphi.$$

Dans le cas où $\mathrm{F}(p)$ est une fonction *réelle* de la variable réelle p, le développement devra avoir ses coefficients α_n, β_n réels, et, par suite, les coefficients primitifs a_n, a_{-n} devront être des quantités complexes conjuguées. En les mettant sous la forme

$$c_n e^{i\gamma_n}, \quad c_n e^{-i\gamma_n},$$

où c_n, γ_n sont des quantités réelles, l'ensemble des deux termes correspondants de la série deviendra

$$a_n e^{nip} + a_{-n} e^{-nip} = 2 c_n \cos(np + \gamma_n).$$

Le développement pourra donc s'écrire ainsi :

$$(5) \qquad \mathrm{F}(p) = c_0 + 2 \sum_{n=1}^{n=\infty} c_n \cos(np + \gamma_n).$$

1176. Pour indiquer un exemple du cas que nous venons de

traiter, considérons la question du développement, suivant les cosinus et les sinus des multiples de l'anomalie excentrique, d'une puissance impaire négative de la distance d'une planète à un point fixe.

Si l'on désigne par p cette anomalie excentrique, par H, K, α, G des constantes dépendant des éléments de l'orbite et de la position du point fixe, le carré de la distance en question se présentera sous la forme

$$\Delta^2 = \mathrm{H} + \mathrm{K}\cos(p-\alpha) + \mathrm{G}\cos 2p.$$

La fonction $\Delta^{-\mu}$, μ étant un nombre entier positif et impair, bien qu'étant obtenue par l'opération de l'extraction de la racine carrée, qui donne lieu à deux déterminations, pourra néanmoins, comme nous le verrons plus tard, être considérée comme uniforme et continue dans l'étendue d'une aire qui ne contient aucun zéro ni aucun infini de cette fonction, et par suite aucun point-racine de l'équation $\Delta^2 = 0$.

Or une discussion facile montre que les racines de l'équation $\Delta^2 = 0$, qui est du quatrième degré par rapport à e^{ip}, sont de la forme

$$ae^{i\theta},\quad \frac{1}{a}e^{i\theta},\quad be^{-i\theta},\quad \frac{1}{b}e^{-i\theta},$$

a, b étant, ainsi que θ, des constantes réelles, et pouvant être supposées telles que l'on ait

$$0 < b < a < 1.$$

La valeur de Δ^2 pourra ainsi s'écrire

$$\Delta^2 = \frac{\mathrm{G}}{2ab}(1 - ae^{-i\theta}z)\left(1 - ae^{i\theta}\frac{1}{z}\right)(1 - be^{i\theta}z)\left(1 - be^{-i\theta}\frac{1}{z}\right).$$

On se propose maintenant de développer suivant les puissances de $z = e^{ip}$ la fonction

$$\mathrm{F}(p) = \frac{1}{\Delta^\mu} = \left(\frac{2ab}{\mathrm{G}}\right)^{\frac{\mu}{2}}(1 - ae^{-i\theta}z)^{-\frac{\mu}{2}}\left(1 - ae^{i\theta}\frac{1}{z}\right)^{-\frac{\mu}{2}}(1 - be^{i\theta}z)^{-\frac{\mu}{2}}\left(1 - be^{-i\theta}\frac{1}{z}\right)^{-\frac{\mu}{2}},$$

et il s'agit de reconnaître *a priori* si ce développement est possible.

Le module de z étant égal à l'unité et les modules des racines de

l'équation $\Delta^2 = 0$ satisfaisant aux inégalités

$$b < a < 1 < \frac{1}{a} < \frac{1}{b},$$

le point z sera toujours compris dans l'intervalle de deux cercles décrits de l'origine comme centre, avec les rayons a et $\frac{1}{a}$, et cet intervalle ne contiendra aucun zéro ni aucun infini de la fonction $F(p)$. Donc le développement proposé sera toujours convergent et sera de la forme de la série (5) du numéro précédent.

1177. Sous la forme que nous avons donnée au développement (1) de $f(c + re^{ip}) = F(p)$, la variable p est supposée n'admettre que des valeurs réelles, et la période 2π de la fonction est aussi réelle. On peut transformer ce développement en un autre qui représente une fonction d'une variable complexe, ayant pour période une constante complexe quelconque.

Posons

$$z - c = re^{ip} = e^{-q-ip} = e^{i(p+iq)},$$

$$p + iq = \frac{2\pi w}{\lambda}, \quad f(z) = F(w),$$

w étant une nouvelle variable et λ une constante arbitrairement choisie, réelle ou complexe.

La fonction $f(z) = F(w)$ ne changeant pas de valeur lorsque p croît de 2π, et par suite w de λ, $F(w)$ sera une fonction périodique d'une variable complexe w, ayant pour période une quantité quelconque λ.

En faisant ces substitutions dans la formule (1), on obtiendra pour $F(w)$ un développement suivant les puissances ascendantes et descendantes de l'exponentielle

$$e^{\frac{2\pi i w}{\lambda}},$$

et dont le coefficient a_n sera donné par la formule

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F\left(\frac{\lambda(\varphi + i\chi)}{2\pi}\right) e^{-ni(\varphi+i\chi)}\, d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(\omega)\, e^{-\frac{2n\pi i\omega}{\lambda}}\, d\varphi, \end{aligned} \right.$$

en posant

$$\rho = e^{-\chi}, \quad \rho e^{i\varphi} = e^{i(\varphi+i\chi)} = e^{\frac{2\pi i \omega}{\lambda}},$$

et remarquant que, ρ étant constant dans l'intégration, on devra aussi considérer $\chi = \log \frac{1}{\rho}$ comme une constante.

On aura alors un développement de la forme

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} F(w) = a_0 + a_1 e^{\frac{2\pi i w}{\lambda}} + a_2 e^{\frac{4\pi i w}{\lambda}} + \ldots \\ + a_{-1} e^{-\frac{2\pi i w}{\lambda}} + a_{-2} e^{-\frac{4\pi i w}{\lambda}} + \ldots . \end{aligned} \right.$$

1178. Par suite du changement de la variable, le contour de l'aire dans laquelle était renfermée la variable z va changer de forme. Voyons par quelles lignes seront remplacés les deux cercles qui limitaient primitivement cette aire.

Pour cela, voyons quel lieu décrit le point ω quand le point $\rho e^{i\varphi}$ décrit un cercle de rayon ρ. Si l'on pose

$$\omega = \mathfrak{r} e^{i\mathfrak{p}}, \quad \lambda = l e^{i\theta},$$

l'équation $\frac{2\pi\omega}{\lambda} = \varphi + i\chi$ donne, en égalant les parties imaginaires,

$$\mathfrak{r} \sin(\mathfrak{p} - \theta) = \frac{l}{2\pi}\chi = \frac{l}{2\pi}\log\frac{1}{\rho},$$

équation qui est, par rapport aux coordonnées polaires $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{p}$, l'équation d'une droite parallèle à la droite qui va de l'origine au point λ. Donc le cercle de rayon ρ se change en une droite menée à la distance

$$h = \frac{l}{2\pi}\log\frac{1}{\rho}$$

de l'origine O et parallèle à la droite Oλ.

De même, si z_0, z_1 sont les points de discontinuité de $f(z)$ par lesquels passent les deux cercles de centre c, et w_0, w_1 les points de discontinuité correspondants de la fonction $F(w)$, les deux cercles seront remplacés par deux droites passant par ces points w_0, w_1, parallèles à Oλ et situées aux distances

$$h_0 = \frac{l}{2\pi}\log\frac{1}{R_0}, \quad h_1 = \frac{l}{2\pi}\log\frac{1}{R_1}$$

de l'origine. Donc l'aire de convergence comprise entre ces deux cercles se trouve remplacée par l'aire indéfinie comprise entre les parallèles en question, et la fonction $F(w)$ sera développable sous la forme (7) pour tout point w de la bande limitée par ces parallèles.

Tandis que les valeurs de z correspondantes aux diverses valeurs $p + 2k\pi$ de l'argument se recouvraient en un seul point, les valeurs $w + k\lambda$ de la nouvelle variable formeront, pour les divers nombres k, une suite de points équidistants, situés sur une même parallèle à $O\lambda$.

1179. Dans le cas de λ réel, on a $\theta = 0$, et $O\lambda$ coïncidera avec l'axe des x. L'aire de convergence sera alors une bande comprise entre deux parallèles à cet axe. On peut passer du cas de λ complexe à celui de λ réel, et *vice versa*, par une simple rotation de l'axe des x, en multipliant w et ω par $e^{\mp i\theta}$.

1180. Si l'on remplace la quantité χ par sa valeur $\frac{2\pi h}{l}$, et que l'on fasse, de plus,

$$\varphi = \frac{2\pi\psi}{l},$$

la valeur (6) du coefficient a_n deviendra

$$(8) \qquad a_n = \frac{1}{l}\int_0^l F\left(\frac{\lambda(\psi + ih)}{l}\right) e^{\frac{2n\pi}{l}(h - i\psi)} d\psi.$$

En transportant l'axe des x parallèlement à lui-même, on pourra amener l'origine O entre les deux parallèles limites, sur la droite intermédiaire située à la distance h de l'origine primitive, et l'on devra alors remplacer h par zéro, ce qui donnera la formule plus simple

$$(9) \qquad a_n = \frac{1}{l}\int_0^l F(e^{i\theta}\psi) e^{-\frac{2n\pi}{l}i\psi} d\psi,$$

ou, en supposant, de plus, λ réel et $\theta = 0$,

$$(10) \qquad a_n = \frac{1}{l}\int_0^l F(\psi) e^{-\frac{2n\pi}{l}i\psi} d\psi.$$

Dans ce dernier cas, le terme $a_n e^{\frac{2n\pi}{l} iw}$ prendra la forme

$$\frac{1}{l}\int_0^l F(\psi) e^{\frac{2n\pi}{l} i(w-\psi)} d\psi,$$

et le développement pourra s'écrire, d'une manière analogue à la série (4),

$$(11)\quad F(w) = \frac{1}{l}\int_0^l F(\psi)\,d\psi + \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{n=\infty}\int_0^l F(\psi)\cos\frac{2n\pi(w-\psi)}{l}\,d\psi.$$

Dans les formules précédentes, qui déterminent la valeur générale des coefficients a_n du développement, on peut remplacer les limites o et l par d'autres dont la différence soit égale à la grandeur l de la période. Il suffit pour cela de remplacer w et ψ par

$$w' = w - l_0, \quad \psi' = \psi - l_0,$$

ce qui revient à déplacer l'origine sur l'axe des x. En posant alors $F(w) = F_1(w')$, la formule (10) devient

$$(12)\qquad a_n = \frac{1}{l}\int_{-l_0}^{l-l_0} F_1(\psi') e^{-\frac{2n\pi}{l} i\psi'} d\psi',$$

d'où

$$(13)\quad \begin{cases} F(w) = F_1(w') = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l_0}^{l-l_0} F_1(\psi')\,d\psi' \\ \qquad + \dfrac{2}{l}\displaystyle\sum_{n=1}^{n=\infty}\int_{-l_0}^{l-l_0} F_1(\psi')\cos\dfrac{2n\pi(w-\psi')}{l}\,d\psi'. \end{cases}$$

1181. Lorsqu'on voudra obtenir le développement de $f(z)$ pour un point z situé en dehors de l'intervalle des cercles menés par les points z_0, z_1, par exemple dans l'intervalle des cercles menés par le point z_1 et par le point de discontinuité suivant z_2 dans l'ordre des distances à c, on devra donner à ρ une autre valeur, comprise entre les distances $\overline{cz_1}$, $\overline{cz_2}$, et substituer cette valeur dans l'expression (2) de a_n.

De même, lorsqu'on voudra développer $F(w)$ pour un point w situé en dehors des parallèles à $O\lambda$ menées par w_0 et w_1, et compris, par exemple, entre les parallèles menées par w_1 et le point de discontinuité suivant w_2, on donnera à h, dans la formule (8), une nouvelle valeur comprise entre les distances h_1, h_2 de w_1, w_2 à $O\lambda$.

§ III.

SÉRIE ET INTÉGRALE DE FOURIER.

1182. Les formules établies dans le paragraphe précédent permettent de développer en série périodique convergente toute fonction d'une variable complexe ou réelle qui est uniforme et continue dans la partie du plan comprise entre deux parallèles données, et qui a pour période une constante quelconque, pourvu que l'on connaisse toutes les valeurs de cette fonction dans l'étendue d'une période, valeurs au moyen desquelles on peut calculer avec une approximation indéfinie les intégrales qui déterminent les coefficients de la série.

Nous avons pu, par un choix convenable de variables, ramener à une forme entièrement réelle le développement d'une fonction réelle de la variable complexe z. Mais cette réduction a été obtenue en particularisant un développement de forme complexe, et elle est fondée sur l'intégration d'une fonction d'une variable complexe le long d'un contour donné. Elle ne peut donc s'appliquer qu'à une fonction $F(p)$ pouvant être définie comme fonction d'une variable complexe re^{pi}, ce qui n'est généralement possible que pour les fonctions analytiques.

Toutefois, Fourier a établi que les développements réels du paragraphe précédent sont susceptibles d'une grande extension, et peuvent s'appliquer à toute fonction, analytique ou non, $F(x)$, périodique par rapport à la variable réelle p et définie par la seule connaissance de *toutes* ses valeurs dans l'étendue d'une période, pourvu que cette fonction satisfasse aux conditions suivantes :

1° Qu'elle soit susceptible d'intégration [1];

2° Qu'elle n'ait pas, dans l'étendue de la période, un nombre infini de maxima et de minima;

3° Que, dans le cas où sa valeur varie brusquement, elle prenne

---

[1] La définition que nous avons donnée [231 et suiv.] d'une intégrale définie ne pourrait plus s'appliquer au cas, par exemple, où la fonction à intégrer serait déterminée par la propriété de prendre une valeur constante a pour toute valeur rationnelle de la variable, et une valeur constante différente b pour toute valeur irrationnelle de cette même variable.

une valeur moyenne entre les valeurs-limites, prises de part et d'autre de la discontinuité.

Nous allons démontrer que, pour toute fonction $F(x)$ satisfaisant à ces conditions, la formule (4) du paragraphe précédent subsiste, c'est-à-dire que l'expression

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}&\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(\xi)\,d\xi\left[\tfrac{1}{2}+\cos(\xi-x)+\cos 2(\xi-x)+\ldots+\cos m(\xi-x)\right]\\ &\qquad=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(\xi)\,d\xi\,\frac{\sin(m+\frac{1}{2})(\xi-x)}{\sin\frac{1}{2}(\xi-x)}\end{aligned}\right.$$

converge, pour m infini, vers la limite $F(x)$.

1183. Commençons par chercher la limite, pour n infini, de l'intégrale

$$(2)\qquad \int_0^h f(t)\,\frac{\sin nt}{\sin t}\,dt,$$

h désignant un nombre positif $\leqq \frac{\pi}{2}$, et $f(t)$ une fonction de t, que nous supposerons d'abord constamment *finie, continue* et *non croissante* lorsque t varie de 0 à h, c'est-à-dire telle que l'accroissement $f(t+\varepsilon)-f(t)$ soit infiniment petit avec ε, et de signe contraire à ε s'il n'est pas nul.

Remarquons d'abord que, dans les limites assignées à la variable t, le rapport $\frac{\sin nt}{\sin t}$ conserve toujours une valeur finie, quel que soit n, et qu'il tend vers la limite n pour $t=0$. Mais ce rapport n'est pas toujours de même signe. Soit, en effet, $\frac{\nu\pi}{n}$ le plus grand multiple de $\frac{\pi}{n}$ qui soit contenu dans h; partageons l'intervalle h en intervalles partiels égaux chacun à $\frac{\pi}{n}$, à l'exception du dernier $h-\frac{\nu\pi}{n}$, qui sera $<\frac{\pi}{n}$. Les valeurs de $\sin nt$ qui correspondent aux valeurs de t comprises dans les intervalles successifs entre

$$0 \text{ et } \frac{\pi}{n},\quad \frac{\pi}{n} \text{ et } \frac{2\pi}{n},\quad \ldots,\quad \frac{(\nu-1)\pi}{n} \text{ et } \frac{\nu\pi}{n},\quad \frac{\nu\pi}{n} \text{ et } h$$

seront de signes alternativement positifs et négatifs; il en sera de même des valeurs de l'expression $f(t)\,\frac{\sin nt}{\sin t}$, et par suite des intégrales de cette expression correspondantes à ces mêmes intervalles. Si l'on désigne donc par $u_0, u_1, \ldots, u_\nu$ les valeurs absolues de ces intégrales, le signe de l'une d'elles u_k sera celui de $(-1)^k$.

De plus, il est aisé de voir que ces valeurs absolues $u_0, u_1, \ldots, u_k, \ldots$ vont en décroissant à mesure que l'indice k augmente. Si l'on remplace, en effet, dans u_k, t par $t+\frac{\pi}{n}$, pour ramener u_k aux mêmes limites que u_{k-1}, on aura

$$(-1)^k u_k = \int_{\frac{(k-1)\pi}{n}}^{\frac{k\pi}{n}} f\left(t+\frac{\pi}{n}\right)\frac{\sin(nt+\pi)}{\sin\left(t+\frac{\pi}{n}\right)}\,dt$$

$$= -\int_{\frac{(k-1)\pi}{n}}^{\frac{k\pi}{n}} f\left(t+\frac{\pi}{n}\right)\frac{\sin nt}{\sin\left(t+\frac{\pi}{n}\right)}\,dt.$$

En comparant cette intégrale à

$$(-1)^{k-1} u_{k-1} = \int_{\frac{(k-1)\pi}{n}}^{\frac{k\pi}{n}} f(t)\,\frac{\sin nt}{\sin t}\,dt,$$

on a, par hypothèse,

$$f\left(t+\frac{\pi}{n}\right) \leqq f(t), \qquad \frac{1}{\sin\left(t+\frac{\pi}{n}\right)} < \frac{1}{\sin t}.$$

Donc l'élément de l'intégrale u_k est moindre que l'élément correspondant de u_{k-1}, et, par suite, $u_k < u_{k-1}$.

Pour les deux dernières intégrales $u_{\nu-1}$ et u_ν, à la diminution de l'élément en passant de la première à la seconde se joint encore la diminution de l'intervalle des limites, $h-\frac{\nu\pi}{n}$ étant $\leqq \frac{\pi}{n}$. Donc, *a fortiori*, $u_\nu < u_{\nu-1}$.

1184. Étudions maintenant de plus près l'intégrale de rang k,

$$(-1)^k u_k = \int_{\frac{k\pi}{n}}^{\frac{(k+1)\pi}{n}} f(t) \frac{\sin nt}{\sin t} dt.$$

Des deux facteurs $f(t)$ et $\frac{\sin nt}{\sin t}$ qui composent la fonction sous le signe $\int$, et qui sont l'un et l'autre continus entre les limites de l'intégrale, le second conserve un signe constant entre ces limites. Donc, d'après la formule établie au n° 283, VI, la valeur de l'intégrale u_k est, au signe près, égale à l'intégrale du second facteur, multipliée par une valeur moyenne du premier facteur, de sorte que, en désignant par f_k une moyenne entre $f\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ et $f\left[\frac{(k+1)\pi}{n}\right]$, on aura

$$(3) \qquad (-1)^k u_k = f_k . \int_{\frac{k\pi}{n}}^{\frac{(k+1)\pi}{n}} \frac{\sin nt}{\sin t} dt.$$

La nouvelle intégrale dépend de k et de n, et sera du signe $(-1)^k$. Désignons-la par $(-1)^k s_k$, et cherchons vers quelle limite elle tend lorsque, k restant invariable, n croît indéfiniment. Pour cela, remplaçons t par $\frac{\tau}{n}$; il viendra

$$(-1)^k s_k = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin \tau}{n \sin \frac{\tau}{n}} d\tau,$$

et, comme $n \sin \frac{\tau}{n}$, pour n infiniment grand, diffère de τ d'une fraction infiniment petite de lui-même, l'intégrale $(-1)^k s_k$ aura avec l'intégrale

$$(-1)^k \sigma_k = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau$$

un rapport infiniment peu différent de l'unité, et, $\sin \frac{\tau}{n}$ étant

moindre que $\frac{\tau}{n}$, ce rapport sera de la forme $1-\varepsilon$, ε étant un infiniment petit positif.

Or, on a vu [481, 482] que l'intégrale $\int_0^\infty \frac{\sin\tau}{\tau}d\tau$ a une valeur finie, égale à $\frac{\pi}{2}$. On peut la partager, comme nous l'avons fait, pour l'intégrale (2), en un nombre infiniment grand d'autres intégrales, prises entre les limites respectives

$$0 \text{ et } \pi, \quad \pi \text{ et } 2\pi, \quad \ldots, \quad k\pi \text{ et } (k+1)\pi, \quad \ldots,$$

et qui seront précisément les intégrales que nous venons de désigner par $(-1)^k\sigma_k$. Dès lors, l'intégrale $\int_0^\infty \frac{\sin\tau}{\tau}d\tau$ sera la limite de la somme de la série infinie

$$\sigma_0-\sigma_1+\ldots+(-1)^k\sigma_k+\ldots,$$

laquelle, par suite, sera convergente et aura pour limite $\frac{\pi}{2}$.

Les termes de cette série allant toujours en décroissant, il résulte d'une proposition connue que la somme Σ_k des k premiers termes sera inférieure ou supérieure à la limite $\frac{\pi}{2}$, suivant que k sera pair ou impair, et qu'ainsi cette somme différera de $\frac{\pi}{2}$ d'une quantité moindre que le terme suivant σ_k.

1185. Revenons maintenant à l'intégrale (2), et cherchons à déterminer la limite vers laquelle elle converge, lorsque n croît indéfiniment.

Quand n croîtra, les intégrales partielles u_k changeront de valeurs, en même temps que leur nombre augmentera. Soit N un nombre entier, indépendant de n, et que, pour plus de simplicité, nous supposerons impair. Le nombre ν, qui croît sans cesse avec n, finira par surpasser N, quelque grand que soit celui-ci.

Cela posé, partageons la somme $u_0-u_1+u_2-\ldots$ en deux groupes, dont l'un contienne les $N+1$ premiers termes, et l'autre tous les termes suivants. Le premier groupe sera, par la formule (3),

$$f_0s_0-f_1s_1+f_2s_2-\ldots-f_Ns_N, \tag{4}$$

et le second, dont le nombre des termes croîtra avec n, sera

$$(5) \qquad f_{N+1}s_{N+1} - f_{N+2}s_{N+2} + \ldots.$$

Il est facile d'obtenir la limite de la somme (4) pour n infini. En effet, les quantités $f_0, f_1, \ldots, f_N$, étant respectivement comprises entre les limites

$$f(0) \text{ et } f\left(\frac{\pi}{n}\right), \quad f\left(\frac{\pi}{n}\right) \text{ et } f\left(\frac{2\pi}{n}\right), \quad \ldots, \quad f\left(\frac{N\pi}{n}\right) \text{ et } f\left[\frac{(N+1)\pi}{n}\right],$$

convergeront chacune vers $f(0)$. D'autre part, les quantités s_0, $s_1, \ldots, s_N$ convergeront respectivement vers $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_N$. Donc la somme (4) aura pour limite

$$f(0)(\sigma_0 - \sigma_1 + \ldots - \sigma_N) = f(0).\Sigma_N.$$

On peut donc la représenter par

$$f(0).\Sigma_N + \delta,$$

δ étant un infiniment petit positif.

Considérons actuellement la somme (5), composée d'un nombre indéfiniment croissant de termes. Ces termes étant alternativement positifs et négatifs, et chacun d'eux étant numériquement moindre que le précédent, la somme sera, quel que soit le nombre des termes, positive et moindre que son premier terme. Elle sera donc moindre que la limite de

$$f_{N+1}s_{N+1} \leqq f(0)s_{N+1},$$

laquelle est moindre que celle de $f(0)\sigma_{N+1}$ augmenté d'un infiniment petit positif ε. Donc l'intégrale (2), somme des deux groupes (4) et (5), finira par différer de $f(0).\Sigma_N$ d'une quantité numériquement moindre que $\delta + f(0)\sigma_{N+1} + \varepsilon$, δ et ε étant des infiniment petits. D'autre part, Σ_N diffère de $\frac{\pi}{2}$ d'une quantité moindre que σ_{N+1}. Donc l'intégrale (2) finira par différer de $\frac{\pi}{2}f(0)$ d'une quantité moindre que

$$\delta + \varepsilon + 2f(0)\sigma_{N+1}.$$

Or, la série $\sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2 - \dots$ étant convergente [**1184**], il en résulte que son terme général doit être infiniment petit pour un indice infiniment grand. Donc on peut choisir N assez grand pour que σ_{N+1} soit moindre que toute grandeur donnée. Donc l'intégrale (2) finira toujours, pour n croissant indéfiniment, par différer aussi peu que l'on voudra de $\frac{\pi}{2}f(0)$. On aura donc

(6) $$\lim_{n=\infty} \int_0^h f(t)\frac{\sin nt}{\sin t}\,dt = \frac{\pi}{2}f(0).$$

1186. La démonstration s'appliquant aussi au cas où $f(t)$ se réduit à une constante c, on aura

(7) $$\lim_{n=\infty} \int_0^h c\frac{\sin nt}{\sin t}\,dt = \frac{\pi}{2}c.$$

Si maintenant la fonction décroissante $f(t)$, au lieu de rester constamment positive depuis $t=0$ jusqu'à $t=h$, devenait négative dans une partie de l'intervalle ou dans l'intervalle tout entier, on pourrait choisir une constante c assez grande pour que la fonction $c+f(t)$ ne cessât pas d'être positive, et par conséquent pour que le théorème lui fût applicable. On aurait alors

$$\lim_{n=\infty} \int_0^h [c+f(t)]\frac{\sin nt}{\sin t}\,dt = \frac{\pi}{2}[c+f(0)].$$

En retranchant de cette équation l'équation (7), on retrouverait encore la formule (6).

Supposons enfin que la fonction $f(t)$ soit croissante depuis $t=0$ jusqu'à $t=h$. Alors $-f(t)$ sera une fonction décroissante, et, par suite,

$$\int_0^h [-f(t)]\frac{\sin nt}{\sin t}\,dt = -\int_0^h f(t)\frac{\sin nt}{\sin t}\,dt$$

convergera vers la limite $-\frac{\pi}{2}f(0)$, d'où l'on conclut que la formule (6) est encore vraie pour le cas de $f(t)$ croissante.

Donc le théorème exprimé par l'équation (6) est vrai pour toute fonction $f(t)$ assujettie à la condition de rester continue pour toute valeur de t, depuis $t=0$ jusqu'à $t=h \leqq \frac{\pi}{2}$, et, de plus, de

rester, dans cet intervalle, toujours décroissante ou toujours croissante, à moins qu'elle ne conserve une valeur constante dans une partie ou dans la totalité de l'intervalle.

1187. Soit maintenant g un nombre compris entre o et h, et supposons que la fonction soit donnée seulement entre $t = g$ et $t = h$, et qu'elle remplisse, dans cet intervalle, les mêmes conditions qu'elle devait remplir tout à l'heure entre o et h. L'intégrale

$$\int_g^h f(t) \frac{\sin nt}{\sin t} dt \tag{8}$$

convergera, pour n infiniment grand, vers une limite que l'on pourrait trouver directement en suivant la même marche que ci-dessus. Mais il est plus simple de ramener ce cas au précédent.

La fonction $f(t)$ n'étant donnée qu'entre g et h, rien n'empêche de compléter la série de ses valeurs depuis $t = 0$ jusqu'à $t = g$, en supposant que, dans cet intervalle, la fonction varie dans le même sens qu'entre g et h, ou, plus simplement, qu'elle reste constamment égale à sa valeur $f(g)$ correspondante à $t = g$. Alors le théorème (6) sera applicable à chacune des deux intégrales

$$\int_0^g f(t) \frac{\sin nt}{\sin t} dt, \quad \int_0^h f(t) \frac{\sin nt}{\sin t} dt,$$

qui convergeront chacune vers cette valeur $\frac{\pi}{2} f(g)$. Donc l'intégrale (8), qui est la différence des deux précédentes, convergera, pour n infini, vers la valeur zéro.

Donc, si g et h sont deux nombres tels que l'on ait

$$0 \leqq g < h \leqq \frac{\pi}{2},$$

et si $f(t)$ est une fonction continue et variant toujours dans le même sens depuis $t = g$ jusqu'à $t = h$ (à moins qu'elle ne reste constante dans une portion quelconque de cet intervalle), l'intégrale (8) tendra, pour n croissant à l'infini, vers la limite zéro, si g n'est pas nul; mais pour $g = 0$ elle tendra vers la limite $\frac{\pi}{2} f(0)$.

Si la fonction $f(t)$ présentait des solutions de continuité pour les valeurs $t=g$, $t=h$, de sorte que, ε étant un infiniment petit positif, $f(g-\varepsilon)$ et $f(h-\varepsilon)$ n'eussent pas les mêmes limites respectives que $f(g+\varepsilon)$ et $f(h+\varepsilon)$, il faudrait remplacer, dans ce qui précède, $f(0)$ par la limite de $f(+\varepsilon)$, que nous désignerons, pour abréger, par $f(+0)$. Il n'y aurait, du reste, rien à changer, pourvu que les valeurs de $f(t)$ correspondantes aux discontinuités ne fussent pas infinies.

1188. Nous avons supposé jusqu'ici que la fonction $f(t)$ ne présente, dans l'intervalle de $t=g$ à $t=h$, aucune valeur *singulière*, c'est-à-dire qu'il n'y ait aucune valeur de t pour laquelle elle devienne discontinue ou qui corresponde à un maximum ou à un minimum de cette fonction.

Supposons maintenant que, entre g et h, il existe des valeurs t_1, t_2, ..., t_μ qui correspondent à des discontinuités ou à des changements de sens de l'accroissement de $f(t)$. Nous partagerons l'intégrale $\int_0^h$ en intégrales partielles, prises chacune entre deux valeurs singulières consécutives :

$$\int_g^{t_1} + \int_{t_1}^{t_2} + \ldots + \int_{t_\mu}^{h}.$$

La première de ces intégrales a pour limite zéro ou $\frac{\pi}{2}f(+0)$, suivant que g sera ou non différent de zéro. Toutes les autres seront nulles, d'après le numéro précédent. Donc, enfin, le théorème démontré ci-dessus subsistera, quelle que soit la marche de la fonction $f(t)$, pourvu que les valeurs singulières y soient en nombre fini et qu'ainsi la fonction soit intégrable.

1189. Nous pouvons maintenant passer à la détermination de la limite, pour m infini, de l'intégrale

$$(1) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(\xi)\,\frac{\sin(m+\frac{1}{2})(\xi-x)}{\sin\frac{1}{2}(\xi-x)}\,d\xi.$$

En posant

$$\frac{1}{2}(\xi-x)=t, \quad 2m+1=n,$$

l'intégrale deviendra

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{1}{2}x}^{\pi-\frac{1}{2}x} F(x+2t)\frac{\sin nt}{\sin t}\,dt,$$

intégrale de même forme que celle que nous venons d'étudier, à cela près que les limites sont différentes. Nous allons, par décomposition, la ramener à des intégrales dont les limites soient comprises dans l'intervalle de o à $\frac{\pi}{2}$.

1° Supposons d'abord $0 < x < \pi$. On décomposera l'intégrale $\int_{-\frac{x}{2}}^{-\pi\frac{x}{2}}$ en

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi-\frac{x}{2}} + \int_{-\frac{x}{2}}^{0}.$$

(α). On a d'abord, en vertu de la formule (6), pour la première intégrale,

$$\lim_{n=\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} F(x+2t)\frac{\sin nt}{\sin t}\,dt = \frac{1}{2}F(x+0).$$

Pour $x = 0$, cette valeur se réduit à

$$\frac{1}{2}F(+0).$$

(β). En changeant t en $\pi - t$, la deuxième intégrale $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi-\frac{x}{2}}$ devient, pour $x > 0$,

$$\lim_{n=\infty}\frac{1}{\pi}\int_{\frac{x}{2}}^{\frac{\pi}{2}} F(x+2\pi-2t)\frac{\sin nt}{\sin t}\,dt = 0;$$

pour $x = 0$, cette valeur se change en

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{F}(2\pi - 0).$$

(γ). Pour la troisième intégrale $\int_{-\frac{x}{2}}^{0}$, si l'on change t en $-t$, il vient

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\frac{x}{2}} \mathrm{F}(x - 2t) \frac{\sin nt}{\sin t}\, dt = \frac{1}{2}\,\mathrm{F}(x - 0),$$

valeur qui, pour $x = 0$, doit être remplacée par zéro

Donc, pour $x > 0$, l'intégrale aura pour valeur

$$\frac{\mathrm{F}(x + 0) + \mathrm{F}(x - 0)}{2};$$

pour $x = 0$, elle deviendra

$$\frac{\mathrm{F}(+0) + \mathrm{F}(2\pi - 0)}{2}.$$

2° Si l'on a $\pi < x < 2\pi$, en remplaçant x par $2\pi - x'$, t par $-t$, l'intégrale deviendra, pour $0 < x' < \pi$,

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\frac{x'}{2}}^{\pi - \frac{x'}{2}} \mathrm{F}(2\pi - x' - 2t) \frac{\sin nt}{\sin t}\, dt,$$

et, en décomposant cette intégrale comme dans le cas précédent, on trouvera, pour les trois parties :

(α). $\frac{1}{2}\mathrm{F}(2\pi - x' - 0) = \frac{1}{2}\mathrm{F}(x - 0)$ pour $x < 2\pi$, et $\frac{1}{2}\mathrm{F}(2\pi - 0)$ pour $x = 2\pi$;

(β). La valeur zéro pour $x < 2\pi$, et $\frac{1}{2}\mathrm{F}(+0)$ pour $x = 2\pi$;

(γ). $\frac{1}{2}\mathrm{F}(x + 0)$ pour $x < 2\pi$, et zéro pour $x = 2\pi$.

Donc, pour $x < 2\pi$, l'intégrale a encore pour valeur

$$\frac{\mathrm{F}(x + 0) + \mathrm{F}(x - 0)}{2},$$

et, pour $x = 2\pi$,

$$\frac{F(+0) + F(2\pi - 0)}{2}.$$

3° Pour x de grandeur quelconque, on ramènera sa valeur entre les limites 0 et 2π par l'addition ou la soustraction d'un multiple convenable de 2π, ce qui n'altère ni la fonction $F(x)$, qui est supposée périodique et de période 2π, ni la série limite de l'intégrale.

1190. Donc, quelque valeur que l'on donne à x, la série trigonométrique

$$(9)\left\{\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(\xi)\,d\xi + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{n=\infty}\int_0^{2\pi} F(\xi)\cos n(\xi - x)\,d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(\xi)\,d\xi \\
&\quad + \frac{1}{\pi}\left[\cos x\int_0^{2\pi} F(\xi)\cos\xi\,d\xi + \cos 2x\int_0^{2\pi} F(\xi)\cos 2\xi\,d\xi + \ldots\right] \\
&\quad + \frac{1}{\pi}\left[\sin x\int_0^{2\pi} F(\xi)\sin\xi\,d\xi + \sin 2x\int_0^{2\pi} F(\xi)\sin 2\xi\,d\xi + \ldots\right]
\end{aligned}\right.$$

aura pour valeur $F(x)$ si cette fonction est continue dans le voisinage de la valeur x, et $\frac{1}{2}[F(x - 0) + F(x + 0)]$ si x est une valeur de discontinuité de $F(x)$. Il en sera encore de même pour $x = 0$, puisque l'on peut, en vertu de la périodicité, remplacer $F(2\pi - 0)$ par $F(-0)$.

Si donc on donne à $F(x)$, entre $x = 0$ et $x = 2\pi$, une suite arbitraire de valeurs, représentable par un arc de courbe de forme quelconque, pourvu qu'il soit composé de parties continues et que les discontinuités, ainsi que les maxima et minima, y soient en nombre fini, la série (9) représentera l'ordonnée de cet arc entre les abscisses 0 et 2π, et, en dehors de ces limites, elle représentera une suite, indéfinie dans les deux sens, d'arcs identiques au premier. Seulement, pour chaque *point de rupture* de la courbe, la série représentera la moyenne arithmétique des deux ordonnées correspondantes à ce point.

La série (9) étant de même forme que la série (4) du n° **1175**, on pourra, par un changement de variable combiné avec un changement d'origine, lui faire subir les transformations *réelles* que nous avons exposées dans le paragraphe précédent, et y remplacer ainsi la période 2π par une période réelle arbitraire l, puis les limites o et l par d'autres limites quelconques $-l_0$ et $l-l_0$.

1191. Donnons quelques exemples d'applications de la série de Fourier.

I. Soit $F(x)=\cos\mu x$. Cette fonction étant paire, le développement ne contiendra que des cosinus [**1174**]. Si l'on suppose la fonction donnée entre $x=-\pi$ et $x=+\pi$, le coefficient α_n du développement [**1175**] aura pour valeur [**449**]

$$\alpha_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos\mu\xi\cos n\xi\,d\xi=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\mu\xi\cos n\xi\,d\xi$$

$$=\frac{2\mu}{\pi}\frac{\sin\mu\pi\cos n\pi}{\mu^2-n^2}=(-1)^n\frac{2\mu}{\pi}\frac{\sin\mu\pi}{\mu^2-n^2},$$

avec

$$\frac{1}{2}\alpha_0=\frac{\sin\mu\pi}{\mu\pi}.$$

On aura donc

$$\cos\mu x=\frac{\sin\mu\pi}{\mu\pi}\left(1-\frac{2\mu^2}{\mu^2-1}\cos x+\frac{2\mu^2}{\mu^2-4}\cos 2x+\ldots\right),$$

d'où, en faisant $x=\pi$,

$$\cos\mu\pi=\frac{\sin\mu\pi}{\mu\pi}\left(1+\frac{2\mu^2}{\mu^2-1}+\frac{2\mu^2}{\mu^2-4}+\ldots\right),$$

ou, en posant $\mu\pi=u$,

$$\cot u=\frac{1}{u}\left(1+\frac{2u^2}{u^2-\pi^2}+\frac{2u^2}{u^2-4\pi^2}+\ldots\right),$$

développement convergent quel que soit u.

En intégrant les deux membres de cette égalité, passant ensuite des logarithmes aux nombres, puis déterminant la constante arbitraire par la condition

$$\lim_{u=0}\frac{\sin u}{u}=1,$$

on a le développement de $\sin u$ en produit infini,

$$\sin u = u\left(1 - \frac{u^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{u^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{u^2}{9\pi^2}\right)\cdots$$

Si l'on y fait $u = \frac{\pi}{2}$, la formule deviendra

$$\frac{2}{\pi} = \left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{16}\right)\left(1 - \frac{1}{36}\right)\cdots$$

II. Soit $F(x) = x$, la fonction étant donnée entre les limites $-\pi$ et $+\pi$. Cette fonction étant impaire, le développement ne devra contenir que des sinus, et le coefficient général sera

$$\beta_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \xi \sin n\xi \, d\xi = (-1)^{n-1}.\frac{2}{n}.$$

On aura donc

$$x = 2\left(\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \ldots\right).$$

Cette série représentera, entre les limites $-\pi$ et $+\pi$, l'ordonnée de la portion correspondante de la bissectrice de l'angle des axes positifs. Dans les intervalles suivants, de $+\pi$ à $+3\pi$, de 3π à $+5\pi$, ..., et de même dans la direction opposée, la série représentera l'ordonnée de la même portion de bissectrice que l'on aurait transportée parallèlement à elle-même le long de l'axe des x à des distances 2π, 4π, ... Pour les abscisses mêmes $\pm\pi$, $\pm 3\pi$, ..., la série représentera les points correspondants de l'axe des x.

III. On donne le contour d'un trapèze isoscèle OABC, dont la base $OC = a$ est située sur l'axe des x, l'angle $AOC = BCO$ étant égal à $\frac{\pi}{4}$, et la hauteur du trapèze étant b. On veut représenter l'ordonnée de ce contour par une série trigonométrique, en supposant qu'il se reproduise identiquement tout le long de l'axe des x, la fonction ayant, par conséquent, a pour période et étant une fonction paire. On prendra alors la série des cosinus, avec les formules

$$\frac{1}{2}\alpha_0 = \frac{1}{a}\int_0^a F(\xi)\,d\xi, \quad \alpha_n = \frac{2}{a}\int_0^a F(\xi)\cos\frac{2\pi n\xi}{a}\,d\xi.$$

Pour effectuer les intégrations, on décomposera chaque intégrale en trois parties, séparées par les abscisses b et $a-b$, de sorte que

$$\alpha_n = \frac{2}{a}\left[\int_0^b \xi \cos\frac{2n\pi\xi}{a}\,d\xi + \int_b^{a-b} b\cos\frac{2n\pi\xi}{a}\,d\xi + \int_{a-b}^{a} (a-\xi)\cos\frac{2n\pi\xi}{a}\,d\xi\right]$$

$$= \frac{4}{a}\int_0^b \xi\cos\frac{2n\pi\xi}{a}\,d\xi + \frac{2b}{a}\int_b^{a-b}\cos\frac{2n\pi\xi}{a}\,d\xi$$

$$= \frac{2b}{n\pi}\sin\frac{2n\pi b}{a} + \frac{a}{4n^2\pi^2}\left(\cos\frac{2n\pi b}{a} - 1\right),$$

avec

$$\frac{1}{2}\alpha_0 = \frac{b(a-b)}{a}.$$

Si l'on suppose $a = 2b$, le trapèze se réduit à un triangle et les expressions des coefficients se simplifient. Il vient alors

$$\frac{1}{2}\alpha_0 = \frac{a}{4},\quad \alpha_{2n} = 0,\quad \alpha_{2n+1} = -\frac{2a}{(2n+1)^2\pi^2},$$

d'où

$$F(x) = \frac{2a}{\pi^2}\left(\frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{1^2}\cos\frac{2\pi x}{a} - \frac{1}{3^2}\cos\frac{6\pi x}{a} - \ldots\right).$$

En faisant $x = 0$, on aura la formule

$$\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots.$$

IV. Si, au contraire, on suppose que les trapèzes soient situés alternativement au-dessus et au-dessous de l'axe des x, la fonction $F(x)$ sera impaire, et l'on devra prendre la série des sinus. La période de la fonction sera alors $2a$, et les intégrales devront être prises entre les limites $-a$ et $+a$. La fonction $F(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{a}$ étant paire, on aura, pour cette fonction [460],

$$\int_{-a}^{+a} = 2\int_0^a.$$

Donc la valeur générale du coefficient β_n sera

$$\beta_n = \frac{2}{a}\int_0^a \mathrm{F}(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{a}\,d\xi$$

$$= \frac{2}{a}\left[\int_0^b \xi\sin\frac{n\pi\xi}{a}\,d\xi + \int_b^{a-b} b\sin\frac{n\pi\xi}{a}\,d\xi + \int_{a-b}^a (a-\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{a}\,d\xi\right]$$

$$= \frac{2a}{n^2\pi^2}\left[\sin\frac{n\pi b}{a} + \sin\left(n\pi - \frac{n\pi b}{a}\right)\right],$$

valeur qui s'annule pour n pair, et qui, pour n impair $= 2m+1$, devient

$$\beta_{2m+1} = \frac{4a}{(2m+1)^2\pi^2}\sin\frac{(2m+1)\pi b}{a}.$$

Donc le développement cherché sera

$$\mathrm{F}(x) = \frac{4a}{\pi^2}\left(\sin\frac{\pi b}{a}\sin\frac{\pi x}{a} + \frac{1}{3^2}\sin\frac{3\pi b}{a}\sin\frac{3\pi x}{a} + \frac{1}{5^2}\sin\frac{5\pi b}{a}\sin\frac{5\pi x}{a} + \ldots\right).$$

Pour $a = 2b$, les trapèzes se réduisant à des triangles, on a

$$\mathrm{F}(x) = \frac{4a}{\pi^2}\left(\sin\frac{\pi x}{a} - \frac{1}{3^2}\sin\frac{3\pi x}{a} + \frac{1}{5^2}\sin\frac{5\pi x}{a} - \ldots\right).$$

1192. *Extension de la série de Fourier aux fonctions de plusieurs variables.* — Soit $\mathrm{F}(x, y)$ une fonction de deux variables indépendantes x, y, périodique par rapport à chacune de ces deux variables, et supposons d'abord que les deux périodes soient l'une et l'autre égales à 2π. On aura, en développant d'abord par rapport à la variable x,

$$\mathrm{F}(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{F}(\xi,y)\,d\xi + \frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{m=\infty}\int_0^{2\pi}\mathrm{F}(\xi,y)\cos m(\xi - x)\,d\xi.$$

En développant maintenant la fonction $\mathrm{F}(\xi, y)$ par rapport à la variable y, on aura de même

$$\mathrm{F}(\xi,y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{F}(\xi,\eta)\,d\eta + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{n=\infty}\int_0^{2\pi}\mathrm{F}(\xi,\eta)\cos n(\eta - y)\,d\eta.$$

Substituant cette valeur dans le développement précédent, on aura

$$\begin{aligned}
F(x,y) &= \frac{1}{4\pi^2}\iint F(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta \\
&+ \frac{1}{2\pi^2}\sum_{m=1}^{m=\infty}\iint F(\xi,\eta)\cos m(\xi - x)\,d\xi\,d\eta \\
&+ \frac{1}{2\pi^2}\sum_{n=1}^{n=\infty}\iint F(\xi,\eta)\cos n(\eta - y)\,d\xi\,d\eta \\
&+ \frac{1}{\pi^2}\sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{n=1}^{n=\infty}\iint F(\xi,\eta)\cos m(\xi - x)\cos n(\eta - y)\,d\xi\,d\eta,
\end{aligned}$$

toutes les intégrations étant faites entre les limites o et 2π.

On passerait de là aisément au cas où les périodes relatives aux deux variables x, y auraient des valeurs quelconques.

Il est facile de voir comment on poursuivrait cette extension dans le cas d'un nombre quelconque de variables.

1193. *Intégrale de Fourier.* — Soit $F(x)$ une fonction toujours finie entre les limites $-l$ et $+l$, et telle que l'intégrale

$$\frac{1}{l}\int_{-l}^{+l} F(x)\,dx$$

tende vers zéro lorsque la valeur numérique commune l des deux limites croît indéfiniment. Nous avons, entre $x = -l$ et $x = +l$,

$$F(x) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{+l} F(\xi)\,d\xi + \frac{1}{l}\sum_{n=1}^{n=\infty}\int_{-l}^{+l} F(\xi)\cos\frac{n\pi(\xi - x)}{l}\,d\xi.$$

En supposant $l = \infty$, il vient, d'après l'hypothèse,

$$\lim_{l=\infty}\frac{1}{2l}\int_{-l}^{+l} F(\xi)\,d\xi = 0,$$

et la valeur de $F(x)$ se réduit à

$$\lim_{l=\infty}\frac{1}{l}\sum_{n=1}^{n=\infty}\int_{-l}^{+l} F(\xi)\cos\frac{n\pi(\xi - x)}{l}\,d\xi.$$

Lorsqu'on passera d'un terme de cette somme au suivant, n croissant d'une unité, le coefficient $\frac{n\pi}{l}$ croîtra de la quantité infiniment petite $\frac{\pi}{l}$, et la somme des n premiers termes croîtra, par l'addition de ce $(n+1)^{\text{ième}}$ terme, de la quantité

$$\frac{\pi}{l} \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-l}^{+l} \mathrm{F}(\xi) \cos\left[\left(\frac{n\pi}{l} + \frac{\pi}{l}\right)(\xi - x)\right] d\xi.$$

Si donc on considère

$$\frac{1}{\pi} \int_{-l}^{+l} \mathrm{F}(\xi) \cos\left[\frac{n\pi}{l}(\xi - x)\right] d\xi$$

comme une fonction $\varphi(\mu)$ de la quantité

$$\mu = \frac{n\pi}{l},$$

l'accroissement de la somme des n premiers termes sera la quantité infiniment petite

$$\frac{\pi}{l} \varphi\left(\mu + \frac{\pi}{l}\right) = d\mu\, \varphi(\mu + d\mu).$$

Or la limite d'une pareille somme n'est autre que l'intégrale

$$\int_0^\infty \varphi(\mu)\, d\mu.$$

Donc, en remettant pour $\varphi(\mu)$ sa valeur, on aura

$$\mathrm{F}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\mu \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{F}(\xi) \cos\mu(\xi - x)\, d\xi.$$

La quantité sous le signe d'intégration relatif à μ étant une fonction paire de μ, on peut, en vertu du n° 460, remplacer les limites o et ∞ par $-\infty$ et $+\infty$, en prenant la moitié, et il vient ainsi

$$\mathrm{F}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{F}(\xi) \cos\mu(\xi - x)\, d\mu\, d\xi.$$

Si la fonction $F(x)$ est paire, on verra, en développant $\cos\mu(\xi - x)$, que le terme de l'intégrale qui dépend de $\sin\mu\xi$ s'évanouira, et, en appliquant la formule du n° 460, on trouvera

$$F(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \int_0^\infty F(\xi)\cos\mu\xi\cos\mu x\, d\mu\, d\xi.$$

De même, si la fonction $F(x)$ est impaire, on pourra écrire

$$F(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \int_0^\infty F(\xi)\sin\mu\xi\sin\mu x\, d\mu\, d\xi.$$

Ces formules pourraient s'étendre, comme celles de la série de Fourier, au cas d'un nombre quelconque de variables.

1194. *Applications.* — I. Soit, a étant un nombre positif,

$$F(x) = e^{-ax},\ \text{de } x = 0 \quad \text{à } x = +\infty,$$
$$\text{et } = e^{+ax},\ \text{de } x = -\infty \ \text{à } x = 0;$$

$F(x)$ sera alors une fonction paire de x, et l'on aura

$$F(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-a\xi}\cos\mu\xi\cos\mu x\, d\mu\, d\xi.$$

En intégrant par rapport à ξ, on a [456, IV]

$$\int_0^\infty e^{-a\xi}\cos\mu\xi\, d\xi = \frac{a}{a^2+\mu^2}.$$

Donc

$$F(x) = \frac{2a}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos\mu x}{a^2+\mu^2}\, d\mu.$$

Ainsi l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{\cos\mu x}{a^2+\mu^2}\, d\mu$$

a pour valeur $\frac{\pi}{2a}e^{+ax}$ depuis $x = -\infty$ jusqu'à $x = 0$, et $\frac{\pi}{2a}e^{-ax}$ depuis $x = 0$ jusqu'à $x = +\infty$ [485, IV].

Si l'on supposait, au contraire, $F(x) = -e^{+ax}$ de $x = -\infty$ à

$x = 0$, on trouverait de même

$$F(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\mu \sin \mu x}{a^2 + \mu^2}\, d\mu.$$

II. Soit maintenant

$$F(x) = \int_a^b f(t) e^{-tx}\, dt,$$

x étant compris entre 0 et $+\infty$. On aura, suivant que l'on supposera la fonction $F(x)$ paire ou impaire,

$$F(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty d\mu \int_0^\infty d\xi \int_a^b dt \cos \mu\xi \cos \mu x f(t) e^{-t\xi},$$

ou

$$F(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty d\mu \int_0^\infty d\xi \int_a^b dt \sin \mu\xi \sin \mu x f(t) e^{-t\xi}.$$

En effectuant les intégrations par rapport à ξ, ces deux expressions deviennent

$$F(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos \mu x\, d\mu \int_a^b \frac{t f(t)}{t^2 + \mu^2}\, dt,$$

$$F(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \mu \sin \mu x\, d\mu \int_a^b \frac{f(t)}{t^2 + \mu^2}\, dt.$$

Ces deux formules supposent $x > 0$. La première est encore vraie pour $x = 0$; elle donne alors

$$(1) \qquad \int_a^b f(t)\, dt = \frac{2}{\pi}\int_0^\mu d\mu \int_a^b f(t) \frac{t\, dt}{t^2 + \mu^2},$$

comme on peut le vérifier en effectuant l'intégration par rapport à μ. Pour $x = 0$, l'autre formule donnerait la moyenne entre $F(-0)$ et $F(+0)$, laquelle est nulle, puisque la fonction $F(x)$ est alors supposée impaire.

En faisant, dans la formule (1), $f(t) = \frac{1}{1 + t^2}$, on en tirera facilement

$$\frac{\pi^2}{4} = \int_0^\infty \frac{d\mu}{1 - \mu^2} \log \frac{1 + \mu^2}{2\mu^2}.$$

III. Trouver une fonction qui soit égale à l'unité depuis $x = -1$ jusqu'à $x = +1$ et qui soit nulle pour toutes les autres valeurs de x.

On aura

$$F(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty d\mu \int_0^1 \cos\mu\xi \cos\mu x \, d\xi = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos\mu x \sin\mu}{\mu} d\mu,$$

résultat conforme à celui que nous avons obtenu au nº 482, II.

§ IV.

SÉRIES DE BÜRMANN ET DE LAGRANGE.

1195. Nous avons vu [1141] que, si $f(w)$ est une fonction de w uniforme et continue pour toutes les valeurs de cette variable renfermées dans un certain cercle $\mathfrak{C}$ (dont nous prendrons, pour plus de simplicité, le centre pour origine des coordonnées), cette fonction pourra se développer en une série ordonnée suivant les puissances entières et positives de w,

(1) $$f(w) = a_0 + a_1 w + a_2 w^2 + \ldots.$$

Supposons maintenant que l'on change de variable, et que w représente une fonction donnée

$$w = \varphi(z)$$

de la nouvelle variable z, qui soit uniforme et continue dans une certaine portion du plan; cette portion du plan renfermera nécessairement le point correspondant à l'origine des w et pour lequel la fonction $\varphi(z)$ s'annule. Soit z_0 ce point, tel que l'on ait

$$\varphi(z_0) = 0.$$

Si l'on fait

$$f(w) = f[\varphi(z)] = F(z),$$

$F(z)$ sera une fonction de z uniforme et continue dans le voisinage du point z_0 et dans toute l'étendue de la portion de plan pour laquelle les deux fonctions f et φ à la fois seront uniformes et continues.

Si l'on met pour w sa valeur $\varphi(z)$ dans le développement de $f(w)$ suivant les puissances de w, on obtiendra le développement de $F(z)$ suivant les puissances entières et positives de la fonction $\varphi(z)$,

$$F(z) = a_0 + a_1\varphi(z) + a_2[\varphi(z)]^2 + \ldots. \tag{2}$$

Il s'agit de déterminer l'étendue de la portion $\mathfrak{A}$ du plan des z pour laquelle ce développement est possible, et de trouver les expressions des coefficients $a_0, a_1, a_2, \ldots$ au moyen des fonctions F et φ.

1196. Posons, pour abréger,

$$\omega = \varphi(\zeta),$$

et considérons le résidu

$$\frac{1}{2\pi i}\int_z \frac{F'(\zeta)\,d\zeta}{\omega - w}.$$

Si la quantité

$$\lim_{\zeta=z}\,(\zeta - z)\,\frac{F'(\zeta)}{\omega - w} = \frac{\lim F'(\zeta)}{\lim \dfrac{\varphi(\zeta) - \varphi(z)}{\zeta - z}} = \frac{F'(z)}{\varphi'(z)}$$

n'est pas infinie [et il en sera ainsi si $\varphi'(z)$ n'est pas nul], cette quantité sera la valeur du résidu en question.

Supposons maintenant que, pour tout point du contour de l'aire $\mathfrak{A}$, le module de $\omega = \varphi(\zeta)$ soit constamment plus grand que le module de $w = \varphi(z)$. On pourra développer alors $\dfrac{1}{\omega - w}$ en une série convergente suivant les puissances de w. On a, en effet,

$$\frac{1}{\omega - w} = \frac{1}{\omega}\left[1 + \frac{w}{\omega} + \cdots + \left(\frac{w}{\omega}\right)^{n-1} + \frac{w^n}{\omega^{n-1}(\omega - w)}\right].$$

En multipliant par $\dfrac{1}{2\pi i}F'(\zeta)\,d\zeta$ et intégrant tout le long du contour de $\mathfrak{A}$, on aura

$$\frac{F'(z)}{\varphi'(z)} = b_0 + b_1 w + \ldots + b_{n-1}w^{n-1} + \Omega_n, \tag{3}$$

les coefficients b_k étant donnés par la formule

$$(4) \qquad b_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{A}} \frac{F'(\zeta)\,d\zeta}{\omega^k},$$

et le terme complémentaire Ω_n ayant pour expression

$$(5) \qquad \Omega_n = \frac{1}{2\pi i}\,\varpi^n \int_{\mathfrak{A}} \frac{F'(\zeta)\,d\zeta}{\omega^n(\omega-\varpi)}.$$

1197. La condition

$$\text{mod.}\,\omega > \text{mod.}\,\varpi$$

sera remplie si l'on prend pour contour de $\mathfrak{A}$ la courbe que l'on détermine en égalant le module R de $\varphi(z)$ à la plus petite des valeurs de ce module qui correspondent aux diverses racines de l'équation $\varphi'(z) = 0$.

En effet, ce module R, qui s'annule pour le point $z = z_0$, va nécessairement en croissant lorsqu'on part de ce point, puisqu'il ne peut recevoir que des valeurs positives. Traçons autour de z_0 une série de courbes que nous désignerons par (R) et dont chacune correspondra à une même valeur constante du module R. Si l'on pose, u et v étant réels,

$$\varpi = \varphi(z) = u + iv,$$

l'équation générale de ces courbes sera

$$u^2 + v^2 = R^2.$$

Deux courbes quelconques de cette suite ne se couperont pas, sans quoi il faudrait que $u^2 + v^2$ admît au point d'intersection deux valeurs différentes, et alors u et v, et par suite $\varphi(z)$, ne seraient plus des fonctions uniformes. Donc ces courbes iront en s'élargissant à mesure que le module R croîtra, et chacune renfermera dans son intérieur toutes les précédentes.

Il en sera ainsi tant que le module R n'aura pas atteint un maximum. Or, pour ce maximum, on doit avoir

$$d(u^2 + v^2) = 0,$$

ou, en reprenant les notations du n° 1101,

$$(uX + vY)\,dx + (vX - uY)\,dy = 0.$$

x et y étant des variables indépendantes, il en résulte

$$uX + vY = 0, \quad vX - uY = 0,$$

d'où l'on tire $X = 0$, $Y = 0$, et par suite

$$\varphi'(z) = X + iY = 0.$$

Donc, *toutes les fois que le module d'une fonction synectique* $\varphi(z)$ *passe par un maximum ou par un minimum, la dérivée* $\varphi'(z)$ *s'annule.*

Il s'ensuit de là que, si R_1 est le plus petit des modules de $\varphi(z)$ qui correspondent aux diverses racines de l'équation $\varphi'(z) = 0$, R_1 sera égal ou inférieur au plus petit des modules maxima. Si donc on prend pour contour de l'aire $\mathfrak{A}$ la courbe (R_1) donnée par l'équation

$$u^2 + v^2 = R_1^2,$$

$\varphi'(z)$ sera différent de zéro dans toute l'étendue de cette aire, et, si z est un point de l'intérieur et ζ un point du contour, on aura toujours

$$\text{mod.}\,\varphi(\zeta) > \text{mod.}\,\varphi(z).$$

Si, de plus, la courbe (R_1) est contenue tout entière dans l'aire de continuité $\mathfrak{B}$ de la fonction $F(z)$, et par suite aussi de sa dérivée $F'(z)$ [1136], la fonction $\dfrac{F'(z)}{\varphi'(z)}$ sera uniforme et continue dans toute l'aire limitée par (R_1), et le développement donné par les formules (3), (4) et (5) sera convergent.

Si (R_1) sortait de l'aire $\mathfrak{B}$, dans laquelle $F(z)$ est uniforme et continue, on remplacerait (R_1) par une autre courbe (R'_1) de la série (R), correspondante à un module $R'_1 < R_1$ et contenue entièrement dans $\mathfrak{B}$.

1198. Cela posé, multiplions les deux membres de l'équation (3) par $\varphi'(z)\,dz = dw$, et intégrons-les entre les limites z_0 et z ou entre les limites 0 et w. Il viendra, en posant

$$a_0 = F(z_0), \quad a_{k+1} = \frac{b_k}{k},$$

$$(6) \qquad F(z) = a_0 + a_1 w + \ldots + a_n w_n + \int_{\mathfrak{A}} \Omega_n\, dw,$$

où l'on aura

$$(7)\quad \begin{cases} a_n = \dfrac{1}{n}\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{z_0}\dfrac{F'(\zeta)\,d\zeta}{\omega^n} = \dfrac{1}{1.2\ldots n}\lim_{\zeta=z_0} D_\zeta^{n-1}\dfrac{(\zeta-z_0)^n F'(\zeta)}{\omega^n} \\ \quad = \dfrac{1}{1.2\ldots n}\lim_{\varepsilon=0} D_\varepsilon^{n-1}\dfrac{\varepsilon^n F'(z_0+\varepsilon)}{[\varphi(z_0+\varepsilon)]^n}. \end{cases}$$

La formule (6) représente la série de Bürmann.

1199. Il nous reste à faire voir que, dans les hypothèses où nous nous sommes placé, le terme complémentaire $\int_{\mathfrak{A}}\Omega_n\,dw$ de la série (6) est infiniment petit pour n infiniment grand. Ce terme complémentaire s'obtient par l'intégration de l'expression

$$(8)\qquad \Omega_n = \frac{1}{2\pi i}[\varphi(z)]^n\int_{\mathfrak{A}}\frac{F(\zeta)\,d\zeta}{[\varphi(\zeta)]^n[\varphi(\zeta)-\varphi(z)]}.$$

Le module $\mathfrak{R}$ de $\varphi(\zeta)$ est constant et plus grand que le module R de $\varphi(z)$. Donc, en faisant sortir le module $\mathfrak{R}$ de dessous le signe $\int$, on voit que Ω_n se réduit à une fonction finie de z, multipliée par le facteur $\left(\frac{R}{\mathfrak{R}}\right)^n$, lequel est infiniment petit pour n infiniment grand, d'où il résulte d'abord que la série (3) est convergente.

Maintenant, le terme complémentaire de la série (6) s'obtiendra en multipliant l'expression (8) par $dw = \varphi'(z)\,dz$ et intégrant entre les limites z_0 et z. Si l'on pose

$$\varphi(z) = R\chi(z),$$

R étant le module de $\varphi(z)$ correspondant à la limite supérieure z, on obtiendra pour résultat une intégrale finie, multipliée encore par le facteur infiniment petit $\left(\frac{R}{\mathfrak{R}}\right)^n$, et l'on en conclura que le terme complémentaire de la série (6) est encore infiniment petit pour n infiniment grand et que, par suite, la série (6) est convergente.

On pourrait encore remarquer que le reste de la série (6) peut se mettre sous la forme

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{A}}\frac{F'(\zeta)\,d\zeta}{[\varphi(\zeta)]^n}\int_0^{\varphi(z)}\frac{Z^n\,dZ}{\varphi(\zeta)-Z},$$

expression qu'il serait facile de transformer en effectuant l'intégration par rapport à Z. On obtiendrait ainsi le reste de la série de Bürmann, comme on l'a fait pour la série de Cauchy [1120] Nous n'insisterons pas davantage sur cette formule, trop compliquée pour être d'une utilité pratique.

1200. Donnons quelques applications de la série de Bürmann.

I. Supposons

$$\varphi(z) = (z-\alpha)(z-\beta).$$

Les courbes (R) seront données par l'équation

$$\text{mod.}[(z-\alpha)(z-\beta)] = [\text{mod.}(z-\alpha)][\text{mod.}(z-\beta)] = R.$$

Or mod. $(z-\alpha)$ et mod. $(z-\beta)$ sont les distances du point z aux deux points α et β. Ces courbes sont donc des ovales de Cassini. Pour R moindre que le carré de la moitié de la distance $\overline{\alpha\beta}$ des deux foyers, chaque courbe se compose de deux ovales séparées, entourant l'une le point α, l'autre le point β. Pour $R = \left(\frac{1}{2}\overline{\alpha\beta}\right)^2$, les deux ovales se rejoignent pour former une courbe en forme de lemniscate. Pour une valeur plus grande de R, on a une courbe unique, renfermant les deux zéros de la fonction.

La dérivée $\varphi'(z) = 2z-\alpha-\beta$ s'évanouit pour $z = \frac{\alpha+\beta}{2}$, expression qui, substituée dans $\varphi(z)$, donne, pour valeur du module,

$$\text{mod.}\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\overline{\alpha\beta}\right)^2.$$

Il faut donc prendre $R < \left(\frac{1}{2}\overline{\alpha\beta}\right)^2$, et partant choisir pour $\mathfrak{A}$ celle des deux ovales, dont se compose alors la courbe, qui entoure le foyer dont z doit être le plus voisin, le foyer α, par exemple.

On a alors, en supposant cette ovale assez petite pour que la fonction $F(z)$ reste uniforme et continue à son intérieur,

$$F(z) = F(\alpha) + a_1(z-\alpha)(z-\beta) + a_2(z-\alpha)^2(z-\beta)^2 + \ldots,$$

$$a_n = \frac{1}{1.2\ldots n}\lim_{\zeta=\alpha} D_\zeta^{n-1}\frac{F'(\zeta)}{(\zeta-\beta)^n} = \frac{1}{1.2\ldots n}D_\alpha^{n-1}\frac{F'(\alpha)}{(\alpha-\beta)^n}.$$

Soient, par exemple,

$$\alpha = 0, \quad \beta = 1, \quad F(z) = (1-z)^{\mu},$$

d'où $R < \frac{1}{4}$, et supposons que la fonction $F(z)$, uniforme dans l'aire $\mathfrak{A}$, qui ne renferme pas le *point de ramification* $z = 1$, parte du point $z = 0$ avec la valeur initiale $1^{\mu} = 1$. Il viendra

$$(1-z)^{\mu} = 1 - \frac{\mu}{1} z(1-z) + \frac{\mu(\mu-2)}{1.2} z^2 (1-z)^2$$
$$- \frac{\mu(\mu-3)(\mu-4)}{1.2.3} z^3 (1-z)^3 + \ldots.$$

1201. II. *Inversion des fonctions.*

Étant donnée entre w et z une équation de la forme $w = \varphi(z)$, on peut, à l'aide de la série précédente, développer z, ou, plus généralement, une fonction donnée $F(z)$ de z, suivant les puissances de $\varphi(z) = w$, ce qui donne l'expression de la fonction *inverse* de la fonction φ. La valeur de z en fonction de w pouvant offrir plusieurs déterminations, on obtiendra plusieurs formes de développement, correspondantes aux différentes aires $\mathfrak{A}$ qui entourent les diverses racines z_0 de l'équation $\varphi(z) = 0$, et à l'intérieur de chacune d'elles z sera une fonction uniforme de w.

Soit donnée, par exemple, l'équation

$$w = ze^{-z}.$$

On a ici

$$z_0 = 0, \quad \varphi'(z) = (1-z)e^{-z}.$$

Pour la racine $z = 1$ de l'équation $\varphi'(z) = 0$, on a

$$\text{mod.}\, \varphi(z) = \frac{1}{e}.$$

Le contour à l'intérieur duquel z doit être compris est donc déterminé par l'équation

$$\text{mod.}\,(ze^{-z}) = \frac{1}{e}, \quad \text{ou} \quad x^2 + y^2 = e^{2(x-1)}.$$

Pour tout point de l'intérieur de ce contour, on a

$$F(z) = F(0) + a_1 w + a_2 w^2 + \ldots,$$

où

$$a_n = \lim_{\zeta=0} \frac{D_\zeta^{n-1}[e^{n\zeta} F'(\zeta)]}{1.2\ldots n}.$$

1202. III. *Série de Lagrange.*

Supposons que l'équation entre w et z soit de la forme

$$z = c + w f(z),$$

d'où l'on tire

$$w = \varphi(z) = \frac{z - c}{f(z)},$$

et, par suite, $z_0 = c$, en admettant que $f(c)$ ne soit pas nul. Si $f(z)$ reste fini dans l'aire considérée, l'équation $\varphi'(z) = 0$ devient

$$f(z) - (z - c) f'(z) = 0.$$

Parmi les racines de cette équation, on prendra celle qui donnera pour le module de $\frac{z-c}{f(z)}$ la plus petite valeur R_1, et le contour de l'aire où z devra être renfermé sera déterminé par l'équation

$$\text{mod.} \frac{z - c}{f(z)} = R_1.$$

On aura alors

$$F(z) = F(c) + a_1 w + a_2 w^2 + \ldots,$$

avec

$$a_n = \frac{D_c^{n-1} \{F'(c)[f(c)]^n\}}{1.2\ldots n}.$$

1203. On peut établir la série de Lagrange d'une manière plus élémentaire, mais qui a l'inconvénient de ne pas faire connaître les conditions de convergence du développement.

Soit z une fonction de w, définie par l'équation

$$z = c + w f(z). \tag{1}$$

Si l'on représente par

$$z = \psi(w) \tag{2}$$

la dépendance entre z et ϖ, on a, par le théorème de Maclaurin,

$$(3)\qquad z = \psi(0) + \frac{\varpi}{1}\psi'(0) + \frac{\varpi^2}{1.2}\psi''(0) + \ldots + \frac{\varpi^n}{1.2\ldots n}\psi^{(n)}(0) + \ldots.$$

L'équation (1), pour $\varpi = 0$, donne $z = c$, ou

$$\psi(0) = c.$$

On a ensuite

$$(4)\qquad \frac{\partial z}{\partial \varpi} = \psi'(\varpi) = f(z) + \varpi f'(z)\frac{\partial z}{\partial \varpi},$$

d'où

$$\psi'(0) = f(c).$$

On pourrait continuer ainsi, et obtenir successivement les valeurs de $\psi''(0)$, $\psi'''(0)$, ... Mais on peut trouver une formule pour exprimer le terme général de la série.

De l'équation (4), on tire

$$\frac{\partial z}{\partial \varpi} = \frac{f(z)}{1 - \varpi f'(z)}.$$

Si l'on différentie maintenant l'équation (1) par rapport au paramètre c, il vient

$$\frac{\partial z}{\partial c} = \frac{1}{1 - \varpi f'(z)};$$

donc

$$(5)\qquad \frac{\partial z}{\partial \varpi} = f(z)\frac{\partial z}{\partial c},$$

ce qui fait connaître $\frac{\partial z}{\partial \varpi}$ au moyen de $\frac{\partial z}{\partial c}$.

On a maintenant identiquement, quelle que soit la fonction χ,

$$D_\varpi[\chi'(z) D_c z] = D_c[\chi'(z) D_\varpi z],$$

comme on peut s'en assurer soit en effectuant les différentiations, soit en remarquant que ces deux quantités sont les expressions de

$$D_\varpi D_c \chi(z) = D_c D_\varpi \chi(z).$$

Donc, en remplaçant $\chi'(z)$ par $f(z)$, l'équation (5) donnera

$$D_\varpi^2 z = D_\varpi[f(z) D_c z] = D_c[f(z) D_\varpi z] = D_c\{[f(z)]^2 D_c z\},$$

d'où, en faisant $w = 0$,

$$\psi''(0) = D_c.[f(c)]^2.$$

De même

$$D_w^3 z = D_w D_c \{[f(z)]^2 D_c z\} = D_c^2 \{[f(z)]^2 D_w z\} = D_c^2 \{[f(z)]^3 D_c z\},$$

d'où

$$\psi'''(0) = D_c^2.[f(c)]^3.$$

Et ainsi de suite, de sorte qu'on aura, en général,

$$\psi^{(n)}(0) = D_c^{n-1}.[f(c)]^n.$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (3), on aura le développement cherché de z suivant les puissances de w.

Si, au lieu du développement de z, on veut obtenir celui d'une fonction donnée $F(z)$, on formera alors les valeurs des dérivées de $F(z)$ par rapport à w. On a

$$D_w F(z) = F'(z) D_w z = F'(z) f(z) D_c z = f(z) D_c F(z),$$

$$D_w^2 F(z) = D_w[F'(z) f(z) D_c z] = D_c[F'(z) f(z) D_w z]$$
$$= D_c \{F'(z)[f(z)]^2 D_c z\} = D_c \{[f(z)]^2 D_c F(z)\},$$

et, en général,

$$D_w^n F(z) = D_c^{n-1} \{[f(z)]^n D_c F(z)\}.$$

Si l'on pose $F(z) = \Phi(w)$, on aura donc

$$\Phi(0) = F(c), \quad \Phi'(0) = f(c) F'(c), \quad \ldots,$$

et généralement

$$\Phi^{(n)}(0) = D_c^{n-1} \{[f(c)]^n F'(c)\},$$

et l'on retrouve ainsi le développement du numéro précédent.

1204. Comme exemple de développement par la série de Lagrange, prenons le problème de Kepler, qui consiste à tirer de l'équation

$$T = u - e \sin u$$

le développement de l'anomalie excentrique u d'une planète suivant les puissances de l'excentricité e, T étant l'anomalie moyenne. On

remplacera, dans les formules précédentes, z, w, c respectivement par u, e, T, et $f(u)$ sera égal à $\sin u$. Il viendra alors

$$u = \mathrm{T} + \frac{e}{1}\sin\mathrm{T} + \frac{e^2}{1.2}\mathrm{D_T}\sin^2\mathrm{T} + \cdots + \frac{e^n}{1.2\ldots n}\mathrm{D_T^{n-1}}\sin^n\mathrm{T} + \ldots.$$

Or on a, pour n impair,

$$\sin^n\mathrm{T} = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\cdot\frac{1}{2^{n-1}}\left[\begin{array}{l}\sin^n n\mathrm{T} - n\sin(n-2)\mathrm{T} + (n)_2\sin(n-4)\mathrm{T} \\ \quad - \ldots + (-1)^{\frac{n-1}{2}}(n)_{\frac{n-1}{2}}\sin\mathrm{T}\end{array}\right],$$

et, pour n pair,

$$\sin^n\mathrm{T} = (-1)^{\frac{n}{2}}\cdot\frac{1}{2^{n-1}}\left[\begin{array}{l}\cos n\mathrm{T} - n\cos(n-2)\mathrm{T} + (n)_2\cos(n-4)\mathrm{T} \\ \quad - \ldots + (-1)^{\frac{n}{2}}\cdot\frac{1}{2}(n)_{\frac{n}{2}}\end{array}\right].$$

On peut tirer de là immédiatement les valeurs des coefficients des puissances de e. On trouve ainsi

$$\begin{aligned}u = \mathrm{T} + e\sin\mathrm{T} + \frac{e^2}{1.2}\sin 2\mathrm{T} + \frac{e^3}{1.2.3}\cdot\frac{1}{2^2}\left(3^2\sin 3\mathrm{T} - \frac{3}{1}\sin\mathrm{T}\right) \\ + \frac{e^4}{1.2.3.4}\cdot\frac{1}{2^3}\left(4^3\sin 4\mathrm{T} - \frac{4}{1}\cdot 2^3\sin 2\mathrm{T}\right) + \ldots.\end{aligned}$$

Pour obtenir le rayon vecteur r, on posera, $2a$ étant le grand axe,

$$\frac{r}{a} = \mathrm{F}(u) = 1 - e\cos u,$$

et l'on aura ainsi

$$\begin{aligned}\frac{r}{a} &= 1 - e\cos\mathrm{T} + \frac{e^2}{1}\sin^2\mathrm{T} + \frac{e^3}{1.2}\mathrm{D_T}\sin^3\mathrm{T} + \ldots \\ &= 1 - e\cos\mathrm{T} - \frac{e^2}{1}\cdot\frac{1}{2}(\cos 2\mathrm{T} - 1) - \frac{e^3}{1.2}\cdot\frac{1}{2^2}(3\cos 3\mathrm{T} - 3\cos\mathrm{T}) \\ &\quad - \frac{e^4}{1.2.3}\cdot\frac{1}{2^3}(4^2\cos 4\mathrm{T} - 4.2^2\cos 2\mathrm{T}) - \ldots.\end{aligned}$$

Pour calculer l'anomalie vraie $v - \varpi$, on développera d'abord $\left(\frac{r}{a}\right)^{-2} = (1 - e\cos u)^{-2}$ suivant les puissances de $e\cos u$; puis on calculera, par la série de Lagrange, les développements des diverses

puissances de $\cos u$. On aura ainsi

$$\frac{a^2}{r^2} = 1 + \frac{e^2}{2} + \frac{3e^4}{4} + \ldots + \left(2e - \frac{2e^3}{4} + \ldots\right)\cos T$$
$$+ \left(\frac{5e^2}{2} + \frac{e^4}{3} + \ldots\right)\cos 2T + \left(\frac{13e^3}{4} + \ldots\right)\cos 3T$$
$$+ \left(\frac{103e^4}{24} + \ldots\right)\cos 4T + \ldots.$$

En multipliant ce développement par celui de

$$\sqrt{1-e^2} = 1 - \frac{e^2}{2} - \frac{e^4}{8} - \frac{e^6}{16} - \ldots,$$

on aura le développement de

$$dv = \frac{a^2}{r^2}\sqrt{1-e^2}\,.\,dT,$$

d'où, en intégrant à partir de $T = 0$, on aura, pour l'expression de l'anomalie vraie,

$$v - \varpi = T + \left(2e - \frac{e^3}{4} + \ldots\right)\sin T + \left(\frac{5e^2}{2^2} - \frac{11e^4}{2^3.3} + \ldots\right)\sin 2T$$
$$+ \left(\frac{13e^3}{2^2.3} - \ldots\right)\sin 3T + \left(\frac{103e^4}{2^5.3} - \ldots\right)\sin 4T + \ldots.$$

1205. Pour obtenir maintenant les conditions de convergence de ces développements, considérons l'équation $\varphi'(z) = 0$ du n° **1197**, laquelle devient ici

$$\frac{\sin u - (u - T)\cos u}{\sin^2 u} = 0, \quad \text{ou} \quad u - T - \tang u = 0.$$

En supposant T réel, et posant $u = x + iy$, cette équation se partagera en deux autres,

$$x - T = \frac{\sin 2x}{\cos 2x + \mathrm{Ch}\,2y}, \quad y = \frac{\mathrm{Sh}\,2y}{\cos 2x + \mathrm{Ch}\,2y}.$$

Ces équations ne pouvant être résolues tant que la valeur de T n'est pas donnée, cherchons du moins la plus petite valeur que

puisse recevoir le module de e pour une valeur réelle quelconque de T.

La seconde des équations précédentes peut se mettre sous la forme

$$2\sin^2 x = 1 - \frac{\operatorname{Sh} 2y}{y} + \operatorname{Ch} 2y.$$

Le second membre croissant avec y, et le premier membre ayant pour valeur maximum 2, y ne pourra surpasser la racine réelle de l'équation

$$1 = \operatorname{Ch} 2y - \frac{\operatorname{Sh} 2y}{y}, \quad \text{ou} \quad y = \frac{1}{\operatorname{Th} y},$$

laquelle, étant résolue au moyen des Tables de fonctions hyperboliques, donne la valeur

$$y = 1{,}1997\ldots.$$

Si maintenant dans la valeur $e = \dfrac{u - T}{\sin u}$ on remplace $u - T$ par sa valeur tirée de $\varphi'(u) = 0$, savoir, $u - T = \operatorname{tang} u$, il vient

$$e = \operatorname{séc} u = 2\,\frac{\operatorname{Ch} y \cos x + i \operatorname{Sh} y \sin x}{\cos 2x + \operatorname{Ch} 2y},$$

expression dont le module est

$$R = \sqrt{\frac{2}{\cos 2x + \operatorname{Ch} 2y}},$$

ou, en remplaçant $\cos 2x + \operatorname{Ch} 2y$ par sa valeur $\dfrac{\operatorname{Sh} 2y}{y}$,

$$R = \sqrt{\frac{2y}{\operatorname{Sh} 2y}}.$$

Cette quantité décroît pour y croissant, et, par suite, son minimum correspond au maximum de y, c'est-à-dire à $y = 1{,}1997\ldots$. On a donc, pour le minimum de R,

$$\frac{\operatorname{Sh} 2y}{2y} = \frac{\operatorname{Ch} 2y - 1}{2} = \operatorname{Sh}^2 y,$$

d'où

$$R = \frac{1}{\operatorname{Sh} y} = 0{,}6627\ldots.$$

Donc le développement ne sera possible, quelle que soit la valeur réelle de T, que pour les valeurs du module de e ou de l'excentricité inférieures à 0,6627....

§ V.

DÉCOMPOSITION DES FONCTIONS EN FRACTIONS SIMPLES.

1206. Soit $f(z)$ une fonction uniforme, présentant à l'intérieur de l'aire $\mathfrak{A}$ les infinis $c_1, c_2, \ldots$. Si le point z est également compris dans l'aire $\mathfrak{A}$, la fonction $\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ de la variable ζ aura les mêmes infinis que $f(\zeta)$, et de plus l'infini $\zeta = z$. Le résidu de cette fonction relatif à l'aire $\mathfrak{A}$ sera donc

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{A}} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i}\sum \int_c \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} + \frac{1}{2\pi i}\int_z \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}.$$

La dernière intégrale $\frac{1}{2\pi i}\int_z \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}$, étant prise le long d'un contour qui ne contient pas d'autre infini que z, a pour valeur $f(z)$. Donc

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{A}} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{2\pi i}\sum \int_c \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}. \tag{1}$$

Soit maintenant n l'indice d'un infini c. On aura [1148]

$$-\int_c \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}$$
$$= \frac{1}{z - c}\int_c f(\zeta)\,d\zeta \left[1 + \frac{\zeta - c}{z - c} + \cdots + \left(\frac{\zeta - c}{z - c}\right)^{n-1} + \frac{(\zeta - c)^n}{(z - c)^{n-1}(z - \zeta)}\right],$$

ou, en posant $(\zeta - c)^n f(\zeta) = \varphi(\zeta)$,

$$-\int_c \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}$$
$$= \frac{1}{z - c}\int_c \varphi(\zeta)\,d\zeta \left[\frac{1}{(\zeta - c)^n} + \cdots + \frac{1}{(z - c)^{n-1}(\zeta - c)} + Z\right],$$

Z ne devenant pas infini pour $\zeta = c$. Le produit $Z\varphi(\zeta)$ ne deviendra pas non plus infini au point $\zeta = c$, et, par suite, on aura

$$\int_c Z\,\varphi(\zeta)\,d\zeta = 0.$$

Donc la valeur du résidu $-\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_c \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}$ se réduit à

$$\frac{1}{2\pi i}\left[\frac{1}{z-c}\int_c \frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-c)^n} + \ldots + \frac{1}{(z-c)^n}\int_c \frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - c}\right]$$
$$= \frac{C'}{z-c} + \frac{C''}{(z-c)^2} + \ldots + \frac{C^{(n)}}{(z-c)^n},$$

en posant

$$(2)\quad C^{(k)} = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-c)^{n-k+1}} = \frac{\varphi^{(n-k)}(c)}{1.2\ldots(n-k)} = \lim_{\varepsilon=0}\frac{D_\varepsilon^{n-k}[\varepsilon^n f(c+\varepsilon)]}{1.2\ldots(n-k)},$$

résultat qui coïncide avec celui que nous avons obtenu au n° 420.

1207. Il reste à calculer la première intégrale $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\mathfrak{A}} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}$. Supposons que tous les infinis de $f(z)$, à l'exception de $z = \infty$, soient contenus dans l'aire $\mathfrak{A}$, et appliquons la transformation par rayons réciproques, en posant $\zeta = \dfrac{1}{\zeta'}$. En changeant le signe, comme au n° 1139, l'intégrale prendra la forme

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{A}'} \frac{f\left(\frac{1}{\zeta'}\right)d\zeta'}{\zeta'(1 - z\zeta')},$$

et, l'aire $\mathfrak{A}'$ ne contenant pas d'autre infini que le point $\zeta' = 0$, cette intégrale n'est autre chose que le résidu, pris en signe contraire, de la fonction $\dfrac{1}{\zeta'(1-z\zeta')}\,f\left(\dfrac{1}{\zeta'}\right)$ pour le point $\zeta' = 0$. Or on a

$$\int_0 \frac{f\left(\frac{1}{\zeta'}\right)d\zeta'}{\zeta'(1-z\zeta')} = \int_0 f\left(\frac{1}{\zeta'}\right)\frac{d\zeta'}{\zeta'}\,(1 + z\zeta' + z^2\zeta'^2 + \ldots + z^\nu\zeta'^\nu + K\,\zeta'^{\nu+1}),$$

ν étant l'indice, pris positivement, de l'infini $\zeta = \infty$ ou $\zeta' = 0$, et

K étant une quantité qui ne devient pas infinie pour $\zeta' = 0$. En posant

$$\zeta'^{\nu} f\left(\frac{1}{\zeta'}\right) = \chi(\zeta'),$$

cette fonction $\chi(\zeta')$ sera finie dans le voisinage de $\zeta' = 0$, et il en sera de même de $K\chi(\zeta')$. Donc la valeur du résidu intégral cherché se réduira à

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{A}} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} = B_0 + B_1 z + \ldots + B_\nu z^\nu,$$

en posant

$$(3) \qquad B_h = \frac{1}{2\pi i}\int_0 \frac{\chi(\zeta')\,d\zeta'}{\zeta'^{\nu-h+1}} = \lim_{\zeta'=0} \frac{D^{\nu-h}\left[\zeta'^{\nu} f\left(\frac{1}{\zeta'}\right)\right]}{1.2\ldots(\nu - h)}.$$

Si la fonction $f(z)$ est rationnelle, l'ordre ν de l'infini $z = \infty$ est égal à l'excès du degré du numérateur sur celui du dénominateur.

Si les deux termes sont de même degré, l'expression précédente du résidu intégral se réduit à la constante $f(\infty)$ ou au rapport des coefficients des plus hautes puissances de z dans les deux termes de $f(z)$.

Si le numérateur est de degré moindre que le dénominateur, $\zeta' = 0$ n'est plus un infini de la fonction $\frac{1}{\zeta'} f\left(\frac{1}{\zeta'}\right) = \zeta f(\zeta)$, et, par suite, le résidu de cette fonction pour $\zeta' = 0$ est nul. La fonction $f(z)$ se réduit alors à la somme des résidus relatifs aux infinis $c_1, c_2, \ldots$.

1208. Donc, si $f(z)$ est une fonction dont tous les infinis, à l'exception de $z = \infty$, sont contenus dans une aire finie $\mathfrak{A}$, et si $n_1, n_2, \ldots, \nu$ sont les indices respectifs, pris positivement, des infinis $c_1, c_2, \ldots, \infty$, $f(z)$ pourra se mettre sous la forme

$$(4) \qquad \begin{cases} f(z) = B_0 + B_1 z + \ldots + B_\nu z^\nu \\ \qquad + \sum \left[\frac{C'}{z - c} + \frac{C''}{(z - c)^2} + \cdots + \frac{C^{(n)}}{(z - c)^n}\right], \end{cases}$$

le signe Σ s'étendant à tous les infinis $c_1, c_2, \ldots$, et les coefficients B_h, $C^{(k)}$ étant déterminés par les formules (3) et (2).

Si l'indice ν était négatif, la partie entière du développement disparaîtrait.

On voit que, si le nombre des infinis $c_1, c_2, \ldots$ est limité, et que les indices $n_1, n_2, \ldots, \nu$ aient tous des valeurs finies, la fonction $f(z)$ sera nécessairement une fonction rationnelle. La formule (4) donne la décomposition de cette fonction rationnelle en fractions simples.

Dans le cas contraire, le développement de $f(z)$ se composera d'une infinité de termes. Pour pouvoir alors faire usage de ce développement, il faudra au préalable s'assurer de sa convergence.

1209. Exemples. — I. *Formule d'interpolation de Lagrange.* Considérons la fonction

$$f(z) = \frac{F(z)}{(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_n)},$$

$F(z)$ étant une fonction entière, de degré moindre que le degré n du dénominateur. On est alors dans le cas où la partie entière du développement de $f(z)$ est nulle, et l'on trouve simplement

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\sum\int_{z_k}\frac{F(\zeta)}{(\zeta-z_1)(\zeta-z_2)\ldots(\zeta-z_n)}\,\frac{d\zeta}{z-\zeta} \\ &= \sum\lim_{\zeta=z_k}\frac{(\zeta-z_k)F(\zeta)}{(\zeta-z_1)(\zeta-z_2)\ldots(\zeta-z_n)}\,\frac{1}{z-\zeta} \\ &= \sum\frac{F(z_k)}{(z_k-z_1)\ldots(z_k-z_{k-1})(z_k-z_{k+1})\ldots(z_k-z_n)}\,\frac{1}{z-z_k}. \end{aligned}$$

En mettant pour $f(z)$ sa valeur, on en tire

$$F(z) = \sum\frac{(z-z_1)\ldots(z-z_{k-1})(z-z_{k+1})\ldots(z-z_n)}{(z_k-z_1)\ldots(z_k-z_{k-1})(z_k-z_{k+1})\ldots(z_k-z_n)}\,F(z_k),$$

ce qui est la formule d'interpolation de Lagrange.

1210. II. Considérons la fonction

$$f(z) = \cot\frac{1}{z},$$

qui a pour infinis toutes les valeurs de z qui sont de la forme

$$z = \frac{1}{n\pi}.$$

Choisissons pour contour de l'aire une courbe qui entoure tous ces infinis, à l'exception de celui qui répond à $n = 0$, et par suite à $z = \infty$, et qui est le point O'. On aura, par la formule du n° 1208,

$$\cot\frac{1}{z} = \frac{1}{2\pi i}\int_0 \frac{\cot\zeta'\,d\zeta'}{\zeta'(1 - z\zeta')} + \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=1}^{n=\infty}\left[\int_{\frac{1}{n\pi}} \frac{\cot\frac{1}{\zeta}\,d\zeta}{z-\zeta} + \int_{-\frac{1}{n\pi}} \frac{\cot\frac{1}{\zeta}\,d\zeta}{z-\zeta}\right].$$

D'ailleurs, $\cot\zeta'$ étant infini du premier ordre pour $\zeta' = 0$, on a

$$\frac{1}{2\pi i}\int_0 \frac{\cot\zeta'\,d\zeta'}{\zeta'(1 - z\zeta')} = \lim_{\zeta'=0}[\mathrm{D}_{\zeta'}(\zeta'\cot\zeta') + z\zeta'\cot\zeta'] = z.$$

Ensuite

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{n\pi}} \frac{\cot\frac{1}{\zeta}\,d\zeta}{z-\zeta} = \lim_{\varepsilon=0}\left(\frac{\varepsilon}{z - \frac{1}{n\pi} - \varepsilon}\cot\frac{1}{\frac{1}{n\pi}+\varepsilon}\right) = -\frac{1}{n\pi}\,\frac{1}{n\pi z - 1}.$$

Donc

$$\cot\frac{1}{z} = z - \sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n\pi}\left(\frac{1}{n\pi z - 1} + \frac{1}{n\pi z + 1}\right) = z\left(1 - 2\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n^2\pi^2 z^2 - 1}\right).$$

De ce développement, dont il est facile de constater la convergence [1], on tirerait aisément les développements de $\cot z$, $\tang z$, ..., en remplaçant z par $\frac{1}{z'}$, puis z' par $\frac{\pi}{2} - z''$, etc. (*voir* n° 1191, I).

1211. Si la fonction $f(z)$ a un nombre illimité d'infinis correspondants à des valeurs de z indéfiniment croissantes, alors les valeurs de z, représentées sur la sphère [1111], se presseront autour du point O' avec une densité infinie, et l'on ne pourra plus appliquer toujours à l'évaluation de l'intégrale $\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{A}} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}$ le procédé du n° 1207.

---

(1) En effet, il satisfait à la condition connue de convergence $\frac{\log\frac{1}{u_n}}{\log n} > 1$.

On peut cependant y parvenir simplement dans certains cas. Prenons pour contour de $\mathfrak{A}$ une ligne de dimensions infinies, qui ne passe par aucun des infinis de $f(\zeta)$. On peut alors écrire l'intégrale sous la forme

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{A}} \frac{1}{1-\frac{z}{\zeta}} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta}.$$

Pour ζ infini et z fini, le facteur $\frac{1}{1-\frac{z}{\zeta}}$ différera infiniment peu de l'unité, et, par suite, on n'altérera qu'infiniment peu l'intégrale en le supprimant. On pourra donc, dans ce cas, toutes les fois que cette intégrale aura une valeur finie, remplacer la formule (1) par la suivante :

$$(5) \qquad f(z) = \frac{1}{2\pi i}\left[\int_{\mathfrak{A}} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta} + \sum \int_c \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{z-\zeta}\right].$$

L'intégrale $\int_{\mathfrak{A}} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta}$ est une constante indépendante de z, mais qui peut dépendre de la forme choisie pour la courbe infinie qui limite $\mathfrak{A}$. La somme de résidus

$$\frac{1}{2\pi i}\sum \int_c \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{z-\zeta},$$

relative à tous les infinis *renfermés dans l'aire* $\mathfrak{A}$, sera en même temps dépendante de la forme de cette courbe. Alors le développement de la fonction en une somme infinie de fractions simples ne pourra pas se faire sans tenir compte du terme complémentaire représenté par la première intégrale.

Mais si, en donnant au contour de $\mathfrak{A}$ une forme symétrique par rapport à l'origine, il arrive que cette intégrale prenne une valeur constante, indépendante de la nature de la courbe symétrique, nulle par exemple, comme cela a lieu lorsque $f(z)$ est une fonction *impaire* de z, alors, en associant deux à deux les résidus correspondants à des infinis symétriquement placés, on aura un développement convergent de la fonction $f(z)$, sous forme d'une suite infinie de fractions simples.

1212. Soit, par exemple, la fonction

$$f(z) = \text{coséc}\, z.$$

Les infinis de cette fonction, qui sont les zéros de $\sin z$, sont situés tous sur l'axe des x, aux distances $\pm n\pi$ de l'origine. Prenons pour contour de l'aire une courbe infinie quelconque, qui ait pour centre l'origine, et qui coupe l'axe des x entre deux infinis consécutifs, de sorte que cosécζ ne soit infini en aucun point du contour. L'intégrale

$$\int_{\mathfrak{A}} \frac{\text{coséc}\,\zeta}{\zeta}\, d\zeta,$$

prise le long de cette courbe, aura, en deux points diamétralement opposés, des éléments égaux et de signes contraires, cosécζ étant une fonction impaire de ζ. Donc cette intégrale sera nulle, et l'on aura simplement

$$\text{coséc}\, z = \frac{1}{2\pi i} \lim_{n=\infty} \sum_{-n}^{+n} \int_{n\pi} \frac{\text{coséc}\,\zeta}{z-\zeta}\, d\zeta,$$

la somme devant être prise entre deux valeurs de n égales et de signes contraires, et qui tendent vers l'infini.

On a d'ailleurs

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{n\pi} \frac{\text{coséc}\,\zeta}{z-\zeta}\, d\zeta = \lim(\zeta - n\pi)\frac{\text{coséc}\,\zeta}{z-\zeta} = \lim \frac{\varepsilon . \text{coséc}(n\pi+\varepsilon)}{z-n\pi-\varepsilon}$$

$$= \lim \frac{(-1)^n}{z-n\pi-\varepsilon}\,\frac{\varepsilon}{\sin\varepsilon} = \frac{(-1)^n}{z-n\pi}.$$

Donc

$$\text{coséc}\, z = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{z-n\pi} = \frac{1}{z} + 2\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^2-n^2\pi^2}.$$

En remplaçant z par $\frac{\pi}{2} - z$, on tire de là

$$\text{séc}\, z = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{z-(n-\frac{1}{2})\pi} = \pi \sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n+1)}{(n+\frac{1}{2})^2\pi^2 - z^2}.$$

En changeant z en iz dans ces deux formules, on aurait les développements de $\frac{1}{\text{Sh}\, z}$, $\frac{1}{\text{Ch}\, z}$.

§ VI.

DÉVELOPPEMENT DES FONCTIONS EN PRODUITS INFINIS.

1213. Considérons une expression de la forme

$$(1) \qquad (1+a_0)(1+a_1)\ldots(1+a_n) = \prod_0^n (1+a_n),$$

$a_0, a_1, \ldots, a_n$ étant des quantités réelles et positives, fonctions de leur indice variable n. Si l'on fait croître indéfiniment le nombre $n+1$ des facteurs, on demande à quelles conditions le produit convergera vers une limite finie et déterminée.

On voit d'abord que la première condition est que le facteur $1+a_n$ tende vers l'unité, et par suite le nombre a_n vers zéro, pour n infiniment grand.

Ensuite, à cause de

$$1+a_n < e^{a_n},$$

il en résulte que l'on a

$$\Pi(1+a_n) < \Pi e^{a_n}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad < e^{\Sigma a_n}$$

Donc, si la série

$$a_0 + a_1 + \ldots + a_n = \Sigma a_n$$

converge vers une limite finie A pour n infiniment grand, on aura, quelque grand que soit n,

$$\Pi(1+a_n) < e^{A}.$$

D'ailleurs tous les facteurs $1+a_n$ étant plus grands que l'unité, le produit croît nécessairement avec n. Donc le produit $\Pi(1+a_n)$ converge vers une limite finie, toutes les fois qu'il en est de même de la série Σa_n.

De plus, on a évidemment

$$\Pi(1+a_n) > \Sigma a_n.$$

Donc, si la somme de la série Σa_n ne convergeait pas vers une limite finie, mais croissait indéfiniment, il en serait de même *a fortiori* du produit $\Pi(1+a_n)$.

Donc la convergence de la série Σa_n est la condition nécessaire et suffisante de la convergence du produit $\Pi(1 + a_n)$.

Considérons maintenant le produit

$$\Pi(1 + u_n),$$

dans lequel $u_0, u_1, \ldots, u_n$ sont des quantités complexes, comprenant comme cas particulier les quantités négatives, et ayant pour modules les quantités $a_0, a_1, \ldots, a_n$. Le module d'une somme étant moindre que la somme des modules des parties [71] et plus grand que leur différence, le module de $1 + u_n$ sera compris entre ceux de $1 + a_n$ et de $1 - a_n$. Donc [74] mod. $\Pi(1 + u_n)$ sera compris entre $\Pi(1 + a_n)$ et $\Pi(1 - a_n)$. Si donc, suivant les conditions de convergence de la série Σa_n, a_n tend vers zéro, ainsi que $\sum_n^N a_n$, n et N étant deux infiniment grands indépendants l'un de l'autre, on en conclura, comme précédemment, que $\prod_n^N (1 \pm a_n)$ tendra vers l'unité pour n et N croissant indéfiniment. Donc il en sera de même du module de $\prod_n^N (1 + u_n)$, et, par conséquent, on en conclura, par un raisonnement analogue à celui que l'on emploie dans la théorie des séries, que le produit $\prod_0^n (1 + u_n)$ tendra vers une limite finie.

Si l'on remplace u_n par $u_n z$, z ayant une valeur finie quelconque, $\prod_0^n (1 + u_n z)$ satisfera évidemment aux mêmes conditions que $\prod_0^n (1 + u_n)$, et par suite sera aussi un produit convergent. Donc, toutes les fois que les coefficients u_n rempliront les conditions ci-dessus, le produit infini $\prod_0^\infty (1 + u_n z)$ prendra, pour chaque va-

leur de z, une valeur finie et déterminée; ce produit représentera donc une fonction finie et uniforme de z.

De plus, cette fonction est continue et monogène. Pour le prouver, il suffit de faire voir qu'elle a, pour chaque valeur de la variable z, une dérivée finie et déterminée. En effet, si l'on pose

$$Z_n = \prod_0^n (1 + u_n z),$$

la dérivée de cette fonction sera donnée par l'équation

$$\frac{1}{Z_n} D_z Z_n = \sum_0^n \frac{u_n}{1 + u_n z}.$$

Le second membre est une série convergente pour n infiniment grand. Donc $D_z Z_n$ converge vers une limite finie et déterminée, et par suite la fonction $Z = \prod_0^\infty (1 + u_n z)$ a une dérivée finie et déterminée par rapport à z, c'est-à-dire qu'elle est *monogène*. Il s'ensuit de là maintenant que $d_z Z$ est infiniment petit avec dz, et par suite que la fonction Z est *continue*.

1214. Voyons maintenant comment nous pourrons obtenir le développement d'une fonction donnée $f(z)$ en produit infini.

Appliquons au développement de la fonction

$$F(z) = D_z \log f(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$$

la formule du paragraphe précédent,

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum \int_c \frac{F(\zeta)\, d\zeta}{z - \zeta} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{A}} \frac{F(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z},$$

la fonction $f(z)$ étant supposée uniforme dans toute l'étendue de l'aire $\mathfrak{A}$.

La fonction dérivée $f'(z)$ a les mêmes infinis que $f(z)$ [1136]; donc $\frac{f'(z)}{f(z)}$ ne peut devenir infinie que pour des valeurs qui rendent $f(z)$ ou infinie ou nulle.

Soient c un zéro ou un infini de $f(z)$, m son indice, positif ou négatif [1133]. La fonction

$$\frac{f(z)}{(z-c)^m} = g(z)$$

sera finie, continue et différente de zéro pour $z = c$ [1152, 1153]. Donc

$$g'(z) = \frac{f'(z)}{(z-c)^m} - \frac{mf(z)}{(z-c)^{m+1}}$$

sera aussi continue pour $z = c$. Il en sera de même, par conséquent, de

$$\frac{g'(z)}{g(z)} = \frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{m}{z-c}.$$

Donc $\frac{f'(z)}{f(z)}$ est égal à $\frac{m}{z-c}$, plus une fonction finie et continue pour $z = c$. Le terme $\frac{m}{z-c}$ étant infiniment grand du premier ordre, tandis que l'autre partie est finie, on en conclut que, *pour toute valeur $z = c$ qui rend la fonction $f(z)$ nulle ou infinie, la fonction $\frac{f'(z)}{f(z)} = \mathrm{D}_z \log f(z)$ est infiniment grande du premier ordre.*

D'après ce que nous avons vu [1206, 1208], le résidu

$$\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{\mathrm{D}_\zeta \log f(\zeta)\, d\zeta}{z-\zeta}$$

est égal à la partie de la fonction $\mathrm{D}_z \log f(z)$ qui devient infinie pour $z = c$, c'est-à-dire à $\frac{m}{z-c}$, comme il est d'ailleurs aisé de le vérifier, en calculant directement

$$\frac{1}{2\pi i}\int_c d\zeta \left[\frac{m}{(\zeta-c)(z-\zeta)} + \frac{g'(\zeta)}{g(\zeta)(z-\zeta)}\right].$$

Donc

$$\frac{1}{2\pi i}\sum \int_c \frac{d\log f(\zeta)}{z-\zeta} = \sum \frac{m}{z-c}.$$

Il reste à calculer l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{A}} \frac{d\log f(\zeta)}{\zeta - z}.$$

On pourra développer $\frac{1}{\zeta - z}$ en une série ordonnée suivant les puissances positives de z, le module de ζ, sur le contour de $\mathfrak{A}$, pouvant toujours être supposé plus grand que le module de z. L'intégrale se présentera alors sous la forme d'une série ordonnée suivant les puissances ascendantes de z, le contour étant choisi de manière à ne passer par aucun des infinis de $D_z \log f(z)$.

Si l'on suppose l'aire $\mathfrak{A}$ infinie dans toutes ses dimensions, on verra, comme au nº 1211, que l'intégrale précédente a la même valeur que l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{A}} \frac{d \log f(\zeta)}{\zeta},$$

et par suite elle se réduit alors à une constante H indépendante de z.

Si la fonction $D_\zeta \log f(\zeta)$ est impaire, et que l'on choisisse pour contour de l'aire $\mathfrak{A}$ une courbe symétrique par rapport à l'origine, alors la constante H sera nulle.

Cela posé, en désignant par H la valeur, constante ou variable, de l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{A}} \frac{d \log f(\zeta)}{\zeta - z},$$

on aura

$$D_z \log f(z) = \sum \frac{m}{z - c} + \mathrm{H}. \tag{1}$$

En intégrant les deux membres entre les limites z_0 et z, z_0 n'étant ni un zéro ni un infini de $f(z)$, il vient

$$\log \frac{f(z)}{f(z_0)} = \sum \log \left(\frac{z - c}{z_0 - c}\right)^m + \int_{z_0}^{z} \mathrm{H}\, dz,$$

d'où l'on tire (1)

$$f(z) = f(z_0)\, e^{\int_{z_0}^{z} \mathrm{H}\, dz} \prod \left(\frac{z - c}{z_0 - c}\right)^m, \tag{2}$$

le produit Π s'étendant à tous les infinis contenus dans l'aire $\mathfrak{A}$.

---

(1) L'intégrale de $d \log f(z)$ dépend, comme nous le verrons plus tard, du chemin suivi par le point z pour passer de z_0 en z, et les valeurs que l'on obtient pour $\log f(z)$ peuvent différer d'un multiple quelconque de $2\pi i$. Il en est de même pour l'intégrale du second membre. Mais ces multiples de $2\pi i$ ne peuvent avoir aucune influence lorsqu'on vient à repasser des logarithmes aux nombres.

Si l'intégrale H est nulle, le facteur $e^{\int_{z_0}^{z} \mathrm{H}\,dz}$ se réduira à l'unité.

1215. Supposons maintenant que, dans l'intérieur de l'aire $\mathfrak{A}$, chacune des équations

$$f(z) = 0, \quad f(z) = \infty$$

n'ait que des racines simples, et soient $c_0, c_1, \ldots$ les racines de la première, c'est-à-dire les *zéros* de la fonction $f(z)$, et $\gamma_0, \gamma_1, \ldots$ les racines de la seconde, c'est-à-dire les *infinis* de $f(z)$. La formule (1) deviendra

$$\mathrm{D}_z \log f(z) = \sum \frac{1}{z - c} - \sum \frac{1}{z - \gamma} + \mathrm{H},$$

d'où

$$f(z) = f(z_0) e^{\int_{z_0}^{z} \mathrm{H}\,dz} \frac{\prod \frac{z - c}{z_0 - c}}{\prod \frac{z - \gamma}{z_0 - \gamma}} = f(z_0) e^{\int_{z_0}^{z} \mathrm{H}\,dz} \frac{\prod \left(1 - \frac{z - z_0}{c - z_0}\right)}{\prod \left(1 - \frac{z - z_0}{\gamma - z_0}\right)},$$

le produit supérieur s'étendant à tous les zéros de $f(z)$ compris dans l'aire $\mathfrak{A}$, et le produit inférieur à tous les infinis compris dans la même aire.

Chacun de ces produits sera de la forme de ceux que nous avons considérés dans le n° 1213, et, s'ils remplissent les conditions de la convergence, ils auront l'un et l'autre pour limites des fonctions synectiques de z.

Si les zéros c sont distribués symétriquement sur une parallèle à l'axe des x, par exemple, indéfinie dans les deux sens, et que l'on prenne pour contour de $\mathfrak{A}$ une courbe infiniment grande, symétrique par rapport à l'origine et ne passant par aucun des zéros ni des infinis de la fonction $f(z)$, l'indice n des points c_n compris dans l'aire variera entre deux valeurs infiniment grandes, correspondantes à deux points symétriques. Et de même pour les infinis γ.

Ainsi, si les zéros sont représentés par les valeurs $a + n\alpha$, a et α étant des constantes, l'indice n devra varier, dans le produit Π, depuis $-n$ à $+n$, n tendant vers l'infini, de sorte que le produit

aura pour valeur

$$\lim_{n=\infty} \prod_{-n}^{+n} (1 + u_n z).$$

Si les zéros sont de la forme $a + (2n+1)\alpha$, n devra varier entre deux valeurs n', n'', telles que $2n''+1$ soit égal à $-(2n'+1)$, c'est-à-dire que l'on devra prendre $n'' = -n' - 1$, ce qui donnera la valeur

$$\lim_{n=\infty} \prod_{-n-1}^{+n} (1 + u_n z).$$

Ces remarques sont essentielles dans les cas où la convergence du produit dépend de la forme du contour de l'aire $\mathfrak{A}$ et du mode de groupement des facteurs. Il peut arriver, en effet, que la quantité H ne s'annule que par suite de la symétrie de la courbe d'intégration, et que le produit Π ne soit convergent que si l'on prend pour son élément le produit de deux facteurs d'indices égaux et de signes contraires. Dans ce cas, l'introduction ou la suppression d'un facteur d'un seul côté de l'origine pourrait modifier la valeur du produit.

Si l'on effectue le groupement des facteurs équidistants de l'origine, en posant, suivant les cas,

$$1 + U_n = (1 + u_n z)(1 + u_{-n} z)$$

ou

$$1 + U_n = (1 + u_n z)(1 + u_{-n-1} z),$$

le produit prendra la forme

$$\lim_{n=\infty} \prod_0^n (1 + U_n),$$

ou simplement

$$\prod_0^\infty (1 + U_n).$$

1216. *Exemples.* — I. Soit la fonction

$$f(z) = \cos z;$$

on aura

$$D_z \log f(z) = -\operatorname{tang} z.$$

Les seuls infinis de cette fonction sont les zéros de $\cos z$, donnés par la formule

$$c_n = (2n+1)\frac{\pi}{2},$$

et, comme ces zéros sont du premier ordre, on aura

$$\frac{1}{2i\pi}\sum_{-n-1}^{n}\int_{c_n}\frac{d\log f(\zeta)}{z-\zeta} = \sum_{-n-1}^{n}\frac{1}{z-(2n+1)\frac{\pi}{2}}.$$

Si l'on prend maintenant pour contour de $\mathfrak{A}$ une ligne infinie, symétrique par rapport à l'origine, on aura

$$\int_{\mathfrak{A}}\frac{\operatorname{tang}\zeta}{\zeta}\,d\zeta = 0.$$

Donc alors $H = 0$, et, par conséquent,

$$D_z \log f(z) = -\operatorname{tang} z = \lim_{n=\infty}\sum_{-n-1}^{n}\frac{1}{z-(2n+1)\frac{\pi}{2}} \quad (^1)$$

d'où, en intégrant,

$$\log\frac{\cos z}{\cos z_0} = \lim_{n=\infty}\sum_{-n-1}^{n}\log\frac{z-(2n+1)\frac{\pi}{2}}{z_0-(2n+1)\frac{\pi}{2}},$$

ou, en faisant $z_0 = 0$,

$$\log\cos z = \lim_{n=\infty}\sum_{-n-1}^{n}\log\left[1-\frac{z}{(2n+1)\frac{\pi}{2}}\right],$$

([1]) En groupant les termes équidistants de l'origine, on trouve

$$\operatorname{tang} z = \sum_{0}^{\infty}\frac{2z}{(2n+1)^2\frac{\pi^2}{4}-z^2}.$$

ou enfin, en groupant symétriquement les termes,

$$\log\cos z = \sum_0^\infty \log\left[\text{I} - \frac{z^2}{(2n+\text{I})^2\frac{\pi^2}{4}}\right].$$

Donc

$$\cos z = \lim_{n=\infty}\prod_{-n-1}^{n}\left[\text{I} - \frac{z}{(2n+\text{I})\frac{\pi}{2}}\right] = \prod_0^\infty\left[\text{I} - \frac{z^2}{(2n+\text{I})^2\frac{\pi^2}{4}}\right].$$

II. Si l'on considère de même la fonction

$$f(z) = \cos(z - z_0),$$

on trouvera

$$\frac{\cos(z-z_0)}{\cos z_0} = \lim_{n=\infty}\prod_{-n-1}^{n}\frac{z - z_0 - (2n+\text{I})\frac{\pi}{2}}{-z_0 - (2n+\text{I})\frac{\pi}{2}}$$

$$= \lim_{n=\infty}\prod_{-n-1}^{n}\left(\text{I} - \frac{z}{z_0 + (2n+\text{I})\frac{\pi}{2}}\right).$$

III. Soit encore la fonction

$$f(z) = \frac{\sin z}{z},$$

pour laquelle

$$D_z \log f(z) = \cot z - \frac{\text{I}}{z}.$$

On trouve encore ici $H = \text{o}$. Les zéros de $\frac{\sin z}{z}$ sont du premier ordre et répondent à $z = n\pi$. Donc, l'indice n devant recevoir toutes les valeurs entières, zéro excepté, on aura

$$\frac{\sin z}{z} = \lim_{n=\infty}\prod_{-n}^{n}\left(\text{I} - \frac{z}{n\pi}\right)$$

ou, en groupant les facteurs deux à deux,

$$\sin z = z\prod_1^\infty\left(\text{I} - \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right).$$

§ VII.

APPLICATION DE L'INTÉGRATION PAR RAPPORT A UNE VARIABLE COMPLEXE AU CALCUL DES INTÉGRALES DÉFINIES.

1217. Nous avons vu que, si $\mathrm{U}\,dx + \mathrm{V}\,dy$ est une différentielle exacte dw d'une fonction des variables indépendantes x, y, l'intégrale $\int_{\mathfrak{A}} dw$, prise le long du contour de l'aire $\mathfrak{A}$, se réduit à zéro lorsque U et V sont deux fonctions uniformes et continues dans l'intérieur et sur le contour de cette aire. Si l'une ou l'autre de ces fonctions devient infinie en des points

$$c_1 = a_1 + ib_1, \quad c_2 = a_2 + ib_2, \quad \ldots,$$

situés à l'intérieur de $\mathfrak{A}$, l'intégrale $\int_{\mathfrak{A}} dw$ est égale à la somme des intégrales $\int_{c_1} dw$, $\int_{c_2} dw$, ..., prises le long de contours infinitésimaux embrassant chacun des infinis c_1, c_2, ...

Si donc on désigne par Δ la valeur de l'intégrale $\int_{\mathfrak{A}} dw$, on aura la formule fondamentale

$$\Delta = \sum \int_c dw,$$

le signe de sommation s'étendant à tous les points de discontinuité c des fonctions U, V contenus dans l'aire $\mathfrak{A}$.

1218. Pour calculer une intégrale $\int_c dw$ prise le long d'un contour infinitésimal tracé autour du point c, posons

$$x + iy - c = x + iy - (a + ib) = \rho e^{i\varphi},$$

d'où

$$x - a = \rho \cos\varphi, \quad y - b = \rho \sin\varphi,$$

et prenons pour contour le cercle de rayon infiniment petit ρ.

L'expression $dw = \mathrm{U}\,dx + \mathrm{V}dy$ prendra, ρ étant constant, la forme $\mathrm{F}(\rho, \varphi)\,d\varphi$, d'où

$$\int_c dw = \lim_{\rho=0} \int_0^{2\pi} \mathrm{F}(\rho, \varphi)\,d\varphi.$$

Soit, par exemple, l'intégrale

$$(1)\qquad \int \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2},$$

prise le long du contour d'un carré dont les côtés ont pour équations $x = \pm 1$, $y = \pm 1$. L'intégrale pourra se décomposer de la manière suivante :

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x^2+1} + \int_{-1}^{+1} \frac{dy}{1+y^2} + \int_{+1}^{-1} \frac{-dx}{x^2+1} + \int_{+1}^{-1} \frac{-dy}{1+y^2}$$
$$= 4\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x^2+1}.$$

Or les fractions

$$\frac{x}{x^2+y^2}, \quad \frac{-y}{x^2+y^2}$$

ont l'une et l'autre un point de discontinuité pour $x = 0$, $y = 0$. En calculant, par la transformation précédente, l'intégrale (1) prise autour de ce point, on aura

$$\Delta = \lim_{\rho=0} \int_0^{2\pi} \frac{\rho^2\,d\varphi}{\rho^2} = 2\pi.$$

Donc

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{2}.$$

1219. Si en particulier $\mathrm{U}\,dx + \mathrm{V}\,dy$ est la différentielle d'une fonction monogène $\mathrm{F}(z)$ d'une variable complexe z, on aura alors

$$\mathrm{U} = \mathrm{F}'(z), \quad \mathrm{V} = i\,\mathrm{F}'(z),$$

d'où

$$\mathrm{U} + i\mathrm{V} = 0.$$

En faisant donc $\mathrm{U} = f(z)$, l'expression $\mathrm{U}\,dx + \mathrm{V}\,dy$ se changera

en $f(z)dz$, et $\frac{\Delta}{2\pi i}$ sera le résidu intégral de la fonction $f(z)$ relatif à l'aire $\mathfrak{A}$. On aura donc la formule

$$\Delta = \int_{\mathfrak{A}} f(z)\,dz = \sum \int_c f(z)\,dz.$$

Pour faire usage de cette formule, on choisira le contour de l'aire $\mathfrak{A}$ de manière à pouvoir exprimer l'intégrale $\int_{\mathfrak{A}} f(z)\,dz$ à l'aide d'intégrales définies relatives à des variables réelles, et l'on égalera cette valeur à la valeur de Δ, calculée au moyen des formules que nous avons données pour évaluer les résidus. En séparant ensuite, dans les deux membres de l'égalité, le réel de l'imaginaire, on obtiendra deux relations entre des intégrales définies et des quantités connues.

On prendra généralement pour contour une ligne telle qu'une seule des variables réelles x et y, ou r et p varie à la fois, ou bien que les deux variables soient des fonctions données d'une même variable auxiliaire; on rencontrera alors immédiatement des intégrales définies ordinaires. Pour cela, on composera, par exemple, le contour de parties circulaires ayant pour centre l'origine, ou de parties rectilignes parallèles aux axes. Dans le premier cas, le rayon vecteur r sera constant; dans le second, une seule des coordonnées x, y variera.

Appliquons cette méthode à quelques exemples.

1220. Si l'on prend pour contour un cercle de rayon r et de centre $c = a + ib$, et que l'on pose

$$x = a + r\cos p, \quad y = b + r\sin p,$$

la différentielle $U\,dx + V\,dy$ prendra la forme $F(r, p)\,dp$, ou simplement $F(p)\,dp$, r étant constant, et l'intégrale proposée deviendra $\int_0^{2\pi} F(p)\,dp$. Donc on aura

$$\int_0^{2\pi} F(p)\,dp = \Delta,$$

équation qui se partagera en deux autres si $F(p)$ est une fonction complexe de p.

Soit, par exemple, l'intégrale

$$\int_{\mathfrak{A}} \frac{f(z)}{1 - az} \frac{dz}{z},$$

$f(z)$ étant une fonction uniforme et continue dans l'intérieur de l'aire $\mathfrak{A}$. La fonction $\frac{f(z)}{(1 - az)z}$ a pour infinis les points $z = 0$ et $z = \frac{1}{a}$, qui peuvent être, ou non, contenus dans l'aire $\mathfrak{A}$. On aura donc

$$\int_{\mathfrak{A}} \frac{f(z)}{1 - az} \frac{dz}{z} = \int_0 \frac{f(z)}{1 - az} \frac{dz}{z} + \int_{\frac{1}{a}} \frac{f(z)}{1 - az} \frac{dz}{z},$$

chaque intégrale du second membre devant être remplacée par zéro si le point auquel elle se rapporte est hors de l'aire.

Si $z = 0$ est dans l'aire, la première intégrale aura pour valeur

$$k_1 = 2\pi i \lim_{z=0} \left[z \frac{f(z)}{(1 - az)z} \right] = 2\pi i f(0).$$

De même, si $z = \frac{1}{a}$ est dans l'aire, la seconde intégrale sera égale à

$$k_2 = 2\pi i \lim_{z=\frac{1}{a}} \left[\left(z - \frac{1}{a}\right) \frac{f(z)}{(1 - az)z} \right] = -2\pi i f\left(\frac{1}{a}\right).$$

La valeur de l'intégrale proposée sera donc

$$\Delta = k_1, \quad \text{ou} \ = k_2, \quad \text{ou} \ = k_1 + k_2,$$

suivant que l'aire $\mathfrak{A}$ contiendra le point $z = 0$ seul, ou le point $z = \frac{1}{a}$ seul, ou ces deux points ensemble.

Si l'on prend maintenant pour $\mathfrak{A}$ un cercle de rayon 1, alors

$$z = e^{ip}, \quad \frac{dz}{z} = i\,dp,$$

et il vient

$$\int_0^{2\pi} \frac{f(e^{ip})\,dp}{1 - ae^{ip}} = 2\pi f(0), \quad \text{pour mod.}\, a < 1,$$

et

$$\int_0^{2\pi} \frac{f(e^{ip})\,dp}{1 - ae^{ip}} = 2\pi\left[f(0) - f\left(\frac{1}{a}\right)\right], \quad \text{pour mod.}\, a > 1.$$

En supposant $f(z) = 1$ et a réel, il vient, suivant que la valeur numérique de a est < 1 ou > 1,

$$\int_0^{2\pi} \frac{dp}{1 - ae^{ip}} = 2\pi \text{ ou } = 0,$$

d'où [*voir* 459, III]

$$\int_0^{2\pi} \frac{(1 - a\cos p)\,dp}{1 - 2a\cos p + a^2} = 2\pi \text{ ou } 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin p\,dp}{1 - 2a\cos p + a^2} = 0.$$

1221. Dans certains cas, on connaît *a priori* la valeur de Δ. Supposons, par exemple, que l'on sache développer, par un moyen quelconque, la fonction $F(z)$ de la variable complexe z en une série convergente pour tous les points de l'aire $\mathfrak{A}$, et ordonnée suivant les puissances entières et positives de $z - c$. Le coefficient de la $n^{\text{ième}}$ puissance de $z - c$ aura pour expression [1140]

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{A}} \frac{F(z)\,dz}{(z - c)^{n+1}}.$$

Si donc on connaît d'avance la valeur de ce coefficient a_n, on aura par là même la valeur de l'intégrale qui le représente.

Si l'on prend pour $\mathfrak{A}$ un cercle de rayon r et de centre c, compris dans l'intérieur du cercle de convergence de la série, la valeur de l'intégrale sera

$$(1) \qquad \int_0^{2\pi} F(c + re^{ip})\,e^{-nip}\,dp = 2\pi r^n a_n.$$

Plus généralement, si l'on connaît le développement d'une fonction $F(z)$ en une série ordonnée suivant les puissances positives et négatives de $z - c$ et convergente dans tout l'intervalle $\mathfrak{A}$ compris entre deux cercles de centre c, on aura la même formule (1)

pour toute valeur entière de n, positive, nulle ou négative, r étant la distance du centre c à un point quelconque situé entre les deux cercles.

On pourrait aussi employer au même usage l'expression générale des coefficients de la série de Bürmann.

Pour appliquer ces formules au calcul des intégrales définies, il suffira de séparer, dans chaque membre, le réel de l'imaginaire, ce qui fournira deux relations.

Par exemple, du développement connu de la fonction

$$e^{-z} = 1 - z + \frac{z^2}{1.2} - \dots + (-1)^n \frac{z^n}{1.2\dots n} + \dots$$

on tire, pour $n \geqq 0$,

$$\int_0^{2\pi} e^{-re^{ip}} e^{-nip}\, dp = 2\pi r^n a_n = (-1)^n \frac{2\pi r^n}{1.2\dots n},$$

formule qui se décompose dans les deux suivantes :

$$\int_0^{2\pi} e^{-r\cos p} \cos(r \sin p + np)\, dp = (-1)^n \frac{2\pi r^n}{1.2\dots n},$$

$$\int_0^{2\pi} e^{-r\cos p} \sin(r \sin p + np)\, dp = 0.$$

Pour $n < 0$, la première intégrale serait nulle, aussi bien que la seconde.

1222. Prenons maintenant pour l'aire $\mathfrak{A}$ un demi-cercle ayant son diamètre sur l'axe des x et son centre à l'origine. En désignant par R le rayon du cercle (*fig.* 92), on a

$$\int(\mathrm{A'A}) + \int(\mathrm{ABA'}) = \Delta,$$

c'est-à-dire

$$\int_{-\mathrm{R}}^{\mathrm{R}} f(x)\, dx + i \int_0^{\pi} f(\mathrm{R}e^{ip})\mathrm{R}e^{ip}\, dp = \Delta.$$

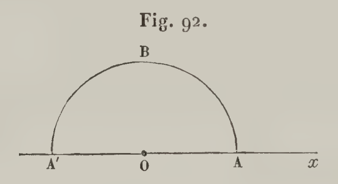
Supposons actuellement que $f(\mathrm{R}e^{ip})$ soit infiniment petit d'ordre μ pour R infiniment grand. Alors la fonction $\mathrm{R}^\mu f(\mathrm{R}e^{ip})e^{ip}$ conservera, pour R croissant indéfiniment, une valeur généralement finie $\varphi(e^{ip})$. La seconde des intégrales précédentes pourra

alors s'écrire sous la forme

$$\frac{i}{R^{\mu-1}}\int_0^{\pi}\varphi(e^{ip})\,dp.$$

La quantité sous le signe $\int$ restant toujours finie, l'intégrale sera

Fig. 92.



pareillement finie, et, si l'on suppose $\mu > 1$, elle sera multipliée par un facteur infiniment petit. Donc on aura, dans ce cas,

$$\lim_{R=\infty} i\int_0^{\pi} f(Re^{ip})\,Re^{ip}\,dp = 0,$$

et notre formule se réduira à

$$(2)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \Delta,$$

Δ représentant toujours le produit par $2\pi i$ du résidu intégral de la fonction $f(z)$, relatif à tous les infinis de cette fonction situés *au-dessus* de l'axe des x.

1223. Considérons, par exemple, l'intégrale

$$\int \frac{z^{2m}\,dz}{1+z^{2n}},$$

m et n étant deux entiers positifs, tels qu'on ait $m < n$. Alors

$$f(Re^{ip}) = \frac{R^{2m}e^{2mip}}{1+R^{2n}e^{2nip}}$$

est infiniment petit de l'ordre $2n - 2m > 1$, et la formule (2) est applicable. On en tire

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{2m}\,dx}{1+x^{2n}} = \Delta.$$

Or, les infinis situés au-dessus de l'axe des x sont celles des racines $c = e^{ip}$ de l'équation $1 + z^{2n} = 0$ dans lesquelles le coefficient de i est positif et qui répondent à

$$p = \frac{\pi}{2n},\ \frac{3\pi}{2n},\ \frac{5\pi}{2n},\ \ldots,\ \frac{(2n-1)\pi}{2n}.$$

Il vient alors

$$\Delta = 2\pi i(F_1 + F_3 + \ldots + F_{2n-1}),$$

en posant, pour abréger,

$$c_k = e^{\frac{k\pi i}{2n}},\quad F_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{c_k} \frac{z^{2m}\,dz}{1+z^{2n}}.$$

On a, pour $z = c_k$,

$$F_k = \lim_{\varepsilon=0} \frac{\varepsilon(c_k+\varepsilon)^{2m}}{1+(c_k+\varepsilon)^{2n}} = \lim_{\varepsilon=0} \frac{\varepsilon(c_k^{2m} + 2m\varepsilon c_k^{2m-1} + \ldots)}{1 + c_k^{2n} + 2n\varepsilon c_k^{2n-1} + \ldots},$$

ou, à cause de $1 + c_k^{2n} = 0$,

$$F_k = \lim \frac{\varepsilon c_k^{2m} + \ldots}{-2n\varepsilon c_k^{-1} + \ldots} = -\frac{1}{2n} c_k^{2m+1}.$$

En faisant donc, pour abréger, $e^{\frac{2m+1}{2n}\pi i} = \gamma$, on a

$$\Sigma F_k = -\frac{1}{2n}(\gamma + \gamma^3 + \ldots + \gamma^{2n-1}) = -\frac{1}{2n}\,\frac{\gamma^{2n}-1}{\gamma-\gamma^{-1}}.$$

Or, pour m entier, $\gamma^{2n} = -1$; donc

$$\Sigma F_k = \frac{1}{n}\,\frac{1}{\gamma-\gamma^{-1}} = \frac{1}{2in} \operatorname{coséc} \frac{(2m+1)\pi}{2n}.$$

Si l'on fait maintenant $R = \infty$, et que l'on suppose $m < n$, d'où $2m+1 < 2n$, l'intégrale prise le long de la demi-circonférence s'évanouira, et il restera, en prenant la moitié de part et d'autre,

$$\int_0^\infty \frac{x^{2m}\,dx}{1+x^{2n}} = \frac{\pi}{2n} \operatorname{coséc} \frac{(2m+1)\pi}{2n},$$

comme nous l'avions déjà trouvé [490].

1224. Soit encore l'intégrale

$$\int \frac{e^{iz}}{ia - z}\, dz.$$

En faisant $z = \mathrm{R}e^{ip}$, la fonction $f(z)$ devient

$$e^{-\mathrm{R}\sin p}\, \frac{e^{i\mathrm{R}\cos p}}{ia - \mathrm{R}e^{ip}},$$

et, pour toutes les valeurs de p comprises entre o et π, cette quantité est infiniment petite d'ordre infini lorsqu'on fait $\mathrm{R} = \infty$. Il reste à examiner ce que devient l'intégrale

$$i \int f(\mathrm{R}e^{ip})\,\mathrm{R}e^{ip}\, dp$$

pour les valeurs de p infiniment voisines de o ou de π, c'est-à-dire à trouver la limite de l'expression

$$\int_0^{\varepsilon} e^{-\mathrm{R}\sin p} \left(\frac{e^{i\mathrm{R}\cos p}}{ia - \mathrm{R}e^{ip}} - \frac{e^{-i\mathrm{R}\cos p}}{ia + \mathrm{R}e^{-ip}} \right) \mathrm{R}e^{ip}\, dp.$$

Si l'on fait abstraction du facteur $e^{-\mathrm{R}\sin p}$, l'expression sous le le signe $\int$ peut se mettre sous la forme

$$(\mathrm{P} + i\mathrm{Q}) \cos p\, dp,$$

P et Q étant des fonctions de p qui ne deviennent pas infinies en même temps que R. Donc l'intégrale proposée peut être mise sous la forme

$$\int_0^{\varepsilon} e^{-\mathrm{R}\sin p} \cos p\, dp\, (\mathrm{P} + i\mathrm{Q}),$$

expression dont la valeur est égale à la quantité

$$\int_0^{\varepsilon} e^{-\mathrm{R}\sin p} \cos p\, dp = \frac{1}{\mathrm{R}} \left(1 - e^{-\mathrm{R}\sin\varepsilon}\right),$$

multipliée par une valeur moyenne de la fonction $\mathrm{P} + i\mathrm{Q}$, c'est-à-dire par une quantité finie. Donc l'intégrale s'annule pour R infini, et la formule (2) est applicable.

Pour a positif, la fonction a, au-dessus de l'axe des x, l'infini $z = ia$, auquel correspond le résidu

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{ia}\frac{e^{iz}\,dz}{ia - z} = -e^{-a}.$$

Donc, pour $a > 0$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}\,dx}{ia - x} = -2\pi i e^{-a}.$$

Si l'on change a en $-a$, la fonction n'aura plus d'infini au-dessus de l'axe des x, et l'on aura $\Delta = 0$, d'où

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}\,dx}{ia + x} = 0.$$

En combinant ces deux formules par addition et soustraction, on en tire [485, IV]

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos x}{a^2 + x^2}\,dx = \frac{\pi e^{-a}}{2a},$$

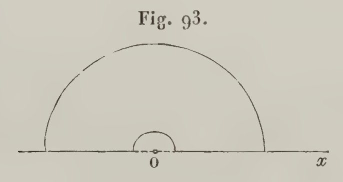
$$\int_0^{\infty}\frac{x\sin x}{a^2 + x^2}\,dx = \frac{\pi e^{-a}}{2}.$$

Cette dernière formule donne, en faisant tendre a vers zéro,

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

1225. Si la fonction $f(z)$ a un infini en un point de l'axe des x, à l'origine $z = 0$ par exemple, l'axe des x faisant partie du contour, nous changerons alors la forme de ce contour, afin d'éviter le point O, en décrivant autour de ce point (*fig.* 93) un demi-cercle de rayon infiniment petit r, et prenant pour aire l'espace

Fig. 93.



compris entre les deux demi-cercles et leur diamètre commun Ox. On aura alors la formule

$$\int_r^R [f(x)+f(-x)]\,dx + i\int_0^\pi f(\mathrm{R}e^{ip})\mathrm{R}e^{ip}\,dp$$
$$-\,i\int_0^\pi f(re^{ip})\,re^{ip}\,dp = \Delta.$$

Si la dernière intégrale $\int_0^\pi f(re^{ip})re^{ip}\,dp$ tend vers zéro en même temps que r, on se retrouve alors dans le cas des numéros précédents, et, si l'intégrale prise le long du demi-cercle extérieur s'évanouit pour $\mathrm{R}=\infty$, on pourra appliquer la formule (2). Si les intégrales prises le long des demi-cercles ne s'évanouissent pas, on joindra leurs valeurs, prises en signe contraire, à la valeur de Δ.

Soit, par exemple, la fonction

$$f(x) = \frac{e^{iz}}{z};$$

on a

$$\int_0^\pi f(re^{ip})\,re^{eip}\,dp = \int_0^\pi e^{ire^{ip}}\,dp.$$

En développant $e^{ire^{ip}}$ en série et faisant ensuite $r=0$, on voit que cette intégrale a pour valeur π. On en conclut, en raisonnant comme au numéro précédent,

$$\int_0^\infty \left(\frac{e^{ix}}{x} - \frac{e^{-ix}}{x}\right) dx = \pi i,$$

c'est-à-dire

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

1226. Prenons pour aire $\mathfrak{A}$ le rectangle parallèle aux axes, dont les côtés ont pour équations

$$x = x_0,\quad x = \mathrm{X},\quad y = y_0,\quad y = \mathrm{Y}.$$

La formule

$$\int_{\mathfrak{A}} (\mathrm{U}\,dx + \mathrm{V}\,dy) = \Delta$$

devient

$$(3)\qquad \int_{x_0}^{X}(U_{x,y_0}-U_{x,Y})\,dx+\int_{y_0}^{Y}(V_{X,y}-V_{x_0,y})\,dy=\Delta,$$

et, si $U\,dx+V\,dy$ est de la forme $f(x+iy)(dx+i\,dy)$,

$$(4)\qquad \left\{\begin{array}{l}\displaystyle\int_{x_0}^{X}[f(x+iy_0)-f(x+iY)]\,dx\\ \displaystyle\qquad +i\int_{y_0}^{Y}[f(X+iy)-f(x_0+iy)]\,dy=\Delta.\end{array}\right.$$

Si l'on suppose maintenant $x_0=-\infty$, $X=+\infty$, $Y=+\infty$, et que $U_{x,y}$ et $V_{x,y}$ ou $f(x+iy)$ s'annulent pour $x=\pm\infty$ quel que soit y, et pour $y=+\infty$ quel que soit x, ces fonctions étant, de plus, des infiniment petits *d'ordre supérieur au premier,* la formule (3) devient

$$\int_{-\infty}^{+\infty}U_{x,y_0}\,dx=\Delta,$$

et la formule (4)

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x+iy_0)\,dx=\Delta.$$

Si, dans cette dernière, on suppose $y_0=0$, on retrouve la formule (2).

Si l'on fait

$$U=F(w)\frac{\partial w}{\partial x},\quad V=F(w)\frac{\partial w}{\partial y},$$

la formule (3) devient

$$\int_{x_0}^{X}\left[F(w_{x,y_0})\frac{\partial w_{x,y_0}}{\partial x}-F(w_{x,Y})\frac{\partial w_{x,Y}}{\partial x}\right]dx$$
$$+\int_{y_0}^{Y}\left[F(w_{X,y})\frac{\partial w_{X,y}}{\partial y}-F(w_{x_0,y})\frac{\partial w_{x_0,y}}{\partial y}\right]dy=\Delta.$$

Supposons, par exemple,

$$w=(a+iy)x,$$

a étant positif, et faisons

$$x_0=y_0=0,\quad X=+\infty,\quad Y=b.$$

Si la fonction $F(w)$ est infiniment petite d'ordre supérieur au premier pour $x = \infty$, l'équation se réduira à

$$a\int_0^\infty F(ax)\,dx - (a+ib)\int_0^\infty F[(a+ib)x]\,dx = \Delta.$$

Si l'on prend $F(w) = w^{n-1}e^{-w}$, n étant réel et positif, on a $\Delta = 0$, et $F(w)$ est infiniment petit d'ordre supérieur au premier pour $x = +\infty$. La formule précédente devient donc [488]

$$\int_0^\infty e^{-(a+ib)x}x^{n-1}\,dx = \frac{a^n}{(a+ib)^n}\int_0^\infty e^{-ax}x^{n-1}\,dx = \frac{\Gamma(n)}{(a+ib)^n}.$$

Donc la formule (7) du n° 488 subsiste pour les valeurs complexes de α dont la partie réelle est positive.

Si l'on fait $a+ib = \rho e^{i\theta}$, la formule se décomposera dans les suivantes :

$$\int_0^\infty e^{-ax}x^{n-1}\cos bx\,dx = \frac{\cos n\theta}{\rho^n}\Gamma(n),$$

$$\int_0^\infty e^{-ax}x^{n-1}\sin bx\,dx = \frac{\sin n\theta}{\rho^n}\Gamma(n).$$

1227. Soit $F(z) = \dfrac{f(z)}{\varphi(z)}$ une fonction rationnelle dont le numérateur est d'un degré inférieur au moins de deux unités au degré du dénominateur. Supposons que l'équation $\varphi(z) = 0$ n'ait pas de racines réelles ni de racines multiples, et soient $c_1, c_2, \ldots$ les racines complexes de cette équation qui ont leur partie imaginaire positive. En appliquant à cette fonction la formule (2), il viendra [469, IV]

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}\,dx = 2\pi i\sum\frac{f(c)}{\varphi'(c)} = 2\pi i\sum C,$$

le signe Σ s'étendant à tous les infinis c situés au-dessus de l'axe des x, et $C_1, C_2, \ldots$ étant les numérateurs de celles des fractions simples dans lesquelles se décompose la fonction donnée, qui correspondent à ces infinis.

Ainsi, si $f(z)$ est d'un degré inférieur à l'unité, la fonction $\dfrac{f(z)}{1+z^2}$ n'aura, au-dessus de l'axe des x, que le seul infini $z = +i$,

et, par suite,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{1+x^2}\,dx = \int_i \frac{f(z)}{1+z^2}\,dz = \pi f(i).$$

En particulier, si $f(x) = (-ix)^{\mu-1}$, pour $0 < \mu < 2$, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(-ix)^{\mu-1}dx}{1+x^2} = [(-i)^{\mu-1} + i^{\mu-1}] \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{\mu-1}dx}{1+x^2} = \pi,$$

d'où, à cause de $i = e^{\frac{\pi i}{2}}$,

$$\int_0^\infty \frac{x^{\mu-1}dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2\sin\frac{\mu\pi}{2}},$$

formule qui revient à celle que nous avons trouvée au n° 490.

1228. Prenons pour contour le périmètre d'un triangle rectangle ABC dont les sommets aient pour coordonnées respectives (x_0, y_0), (X, y_0), (X, Y). On aura

$$\int(AB) + \int(BC) - \int(AC) = \Delta.$$

En faisant, pour plus de simplicité, $x_0 = y_0 = 0$, on aura, en chaque point de AC,

$$y = ax, \quad \text{d'où} \quad dy = a\,dx, \quad Y = aX,$$

et l'on a, au lieu de la formule du n° 1206,

$$\int_0^X F(w_{x,0}) \frac{\partial w_{x,0}}{\partial x}\,dx + \int_0^{aX} F(w_{X,y}) \frac{\partial w_{X,y}}{\partial y}\,dy - \int_0^X F(w_{x,ax})\,dw_{x,ax} = \Delta.$$

Si l'on fait $w = x + iy$, cette formule devient

$$\int_0^X F(x)\,dx + ia\int_0^X F(X + iay)\,dy - (1 + ia)\int_0^X F[(1+ia)x]\,dx = \Delta.$$

Soit, par exemple, la fonction

$$f(z) = e^{-z^2},$$

qui est finie pour toute valeur de x, si l'on prend

$$z = (1 + ia)x, \quad a^2 < 1.$$

Alors $\Delta = 0$, et l'on a

$$\int_0^X \left(e^{-x^2} + iae^{-(X+iax)^2}\right) dx - (1 + ia) \int_0^X e^{-(1+ia)^2 x^2} dx = 0.$$

Si l'on suppose maintenant $X = \infty$, comme on a, en faisant $x = tX$,

$$\int_0^X e^{-(X+iax)^2} dx = Xe^{-X^2} \int_0^1 e^{-(1+iat)^2} dt,$$

et que la seconde intégrale a toujours une valeur finie, la première est nulle pour X infini. Il reste donc, à cause de $\int_0^\infty e^{-x}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$,

$$(1 + ia) \int_0^\infty e^{-(1+ia)^2 x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

d'où, en séparant le réel de l'imaginaire,

$$\int_0^\infty e^{-(1-a^2)x^2} \cos(2ax^2)\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2(1+a^2)},$$

$$\int_0^\infty e^{-(1-a^2)x_2} \sin(2ax^2)\, dx = \frac{a\sqrt{\pi}}{2(1+a^2)}.$$

1229. Soit $F(z)$ une fonction rationnelle. Nous avons vu [1206 et suiv.] que cette fonction peut se décomposer en une fonction entière $f(z)$, plus la somme de tous les résidus de la fonction $\frac{F(\zeta)}{z-\zeta}$, relatifs aux divers infinis $c, c', \ldots$ de la fonction $F(\zeta)$, somme que nous désignerons par

$$\sum \frac{C_k}{(z-c)^k}.$$

En prenant donc pour $\mathfrak{A}$ une aire renfermant tous les infinis de $F(z)$ autres que $z = \infty$, et représentant par $\varphi(z)$ une fonction quelconque uniforme et continue dans toute l'étendue de l'aire $\mathfrak{A}$,

on aura

$$\int_{\mathfrak{A}} f(z)\varphi(z)\,dz = 0,$$

et par suite [1135]

$$\int_{\mathfrak{A}} \mathrm{F}(z)\varphi(z)\,dz = \sum \mathrm{C}_k \int_{\mathfrak{A}} \frac{\varphi(z)\,dz}{(z-c)^k} = 2\pi i \sum \mathrm{C}_k \frac{\varphi^{(k-1)}(c)}{1.2\ldots(k-1)}.$$

En faisant, par exemple, $\varphi(z) = e^{i\mu z}$, pour $\mu > 0$, on aura, la fonction sous le signe $\int$ étant supposée infiniment petite d'ordre supérieur au premier pour $x = \infty$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\mu x}\mathrm{F}(x)\,dx = 2\pi i \sum \mathrm{C}_k \frac{(i\mu)^{k-1}}{1.2\ldots(k-1)} e^{-\mu b} e^{i\mu a},$$

où l'on a fait $c = a + ib$, $\mathrm{F}(x)$ n'ayant aucun infini sur l'axe des x.

1230. Soient w une fonction de z, et $\varphi(w)$ une fonction de w qui, pour des valeurs

$$w = \gamma',\ \gamma'',\ \ldots,\ \gamma^{(m)},$$

correspondantes à des points z contenus dans l'aire $\mathfrak{A}$, devienne infinie des ordres respectifs

$$\mu',\ \mu'',\ \ldots,\ \mu^{(m)}.$$

Soit, de plus, $f(z)$ une fonction de z qui ait, pour les points

$$z = c',\ c'',\ \ldots,\ c^{(n)},$$

contenus dans l'aire $\mathfrak{A}$, des valeurs infinies des ordres respectifs

$$\nu',\ \nu'',\ \ldots,\ \nu^{(n)}.$$

Posons, comme précédemment,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{A}} \frac{f(\zeta)}{z-\zeta}\,d\zeta = \sum \frac{\mathrm{C}_k}{(z-c)^k},$$

et de même

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{A}} \frac{\varphi(\omega)}{w-\omega}\,d\omega = \sum \frac{\Gamma_h}{(w-\gamma)^h},$$

la variable ω prenant les valeurs correspondantes à celles que prend ζ le long du contour de l'aire $\mathfrak{A}$.

Le produit $\varphi(w)f(z)$ ayant pour infinis tous les infinis des fonctions φ et f, on aura

$$\int_{\mathfrak{A}} \varphi(w) f(z)\,dz = \sum \int_{\gamma} \frac{\Gamma_h f(z)\,dz}{(w-\gamma)^h} + \sum \int_{c} \frac{C_k \varphi(w)\,dz}{(z-c)^k}.$$

Si l'on pose maintenant

$$f(z)\,dz = \mathrm{F}(w)\,dw, \quad \text{ou} \quad \mathrm{F}(w) = f(z)\frac{dz}{dw},$$

la première somme deviendra

$$\sum \int_{\gamma} \frac{\Gamma_h \mathrm{F}(w)\,dw}{(w-\gamma)^h} = 2\pi i \sum \frac{\Gamma_h \mathrm{F}^{(h-1)}(\gamma)}{1.2\ldots(h-1)};$$

si l'on fait ensuite

$$\varphi(w) = \Phi(z),$$

la seconde somme deviendra

$$\sum \int_{c} \frac{C_k \Phi(z)\,dz}{(z-c)^k} = 2\pi i \sum \frac{C_k \Phi^{(k-1)}(c)}{1.2\ldots(k-1)}.$$

Donc on a la formule

$$\int_{\mathfrak{A}} \varphi(w) f(z)\,dz = 2\pi i \left[\sum \frac{\Gamma_h \mathrm{F}^{(h-1)}(\gamma)}{1.2\ldots(h-1)} + \sum \frac{C_k \Phi^{(k-1)}(c)}{1.2\ldots(k-1)}\right].$$

Exemples. — I. Soit $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$. En prenant toujours pour $\mathfrak{A}$ la moitié supérieure du plan, on a

$$c = i, \quad C = \lim \frac{\varepsilon}{1+(i+\varepsilon)^2} = \frac{1}{2i}.$$

La seconde somme devient donc

$$\pi\Phi(i) = \pi\varphi[w(i)].$$

Si l'on fait, de plus,

$$w = \frac{1+iz}{1-iz},$$

on a d'abord

$$w(i) = 0, \quad \text{d'où} \quad \pi\Phi(i) = \pi\varphi(0).$$

Ensuite

$$f(z)\,dz = \frac{dz}{1+z^2} = \frac{1}{2i}\frac{dw}{w},$$

d'où

$$F(w) = \frac{1}{2iw}.$$

Donc

$$2\pi i \sum \frac{\Gamma_h F^{(h-1)}(\gamma)}{1.2\ldots(h-1)} = \pi \sum (-1)^h \frac{\Gamma_h}{\gamma^h}.$$

Par conséquent, si l'on se trouve dans les conditions du n° **1222**, on aura

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi\left(\frac{1+ix}{1-ix}\right)\frac{dx}{1+x^2} = \pi\left[\varphi(0) + \sum (-1)^h \frac{\Gamma_h}{\gamma^h}\right].$$

II. De même, pour

$$f(z) = \frac{r}{r^2+z^2}, \quad w = \log\frac{z}{i},$$

d'où

$$F(w) = \frac{1}{i}\frac{re^w}{r^2+e^{2w}},$$

on trouvera

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi\left(\log\frac{x}{i}\right)\frac{r\,dx}{r^2+x^2} &= \int_0^{\infty}\left[\varphi\left(\log x - \frac{\pi i}{2}\right) + \varphi\left(\log x + \frac{\pi i}{2}\right)\right]\frac{r\,dx}{r^2+x^2} \\ &= \pi\varphi(\log r) + 2\pi r \sum \frac{\Gamma_h}{1.2\ldots(h-1)} D_\gamma^{h-1}\frac{e^\gamma}{r^2+e^{2\gamma}}.\end{aligned}$$

CHAPITRE III.

THÉORIE DES FONCTIONS MULTIFORMES.

§ I.

DES FONCTIONS MULTIFORMES.

1231. Nous avons appelé fonction *multiforme* [1110] de la variable complexe z une fonction qui, pour chaque valeur de z, est susceptible de prendre plusieurs valeurs distinctes, différant entre elles de quantités finies.

Si l'on attribue à z une suite continue de valeurs, nous supposerons que chacune des *déterminations* de la fonction $w = f(z)$ prend aussi une suite continue de valeurs, de telle sorte que, si le point variable z décrit dans le plan des z un chemin continu quelconque, chacune des déterminations de w décrira en même temps un chemin continu correspondant. Nous appellerons ces divers chemins les *branches* du chemin total décrit par la fonction w.

1232. On peut aussi considérer le plan des z comme portant, en chacun de ses points z, les diverses déterminations de la fonction w, qui formeront divers systèmes de *cotes* attachées aux points z. En rangeant ces diverses déterminations $w^{(1)}, w^{(2)}, \ldots$ toujours dans le même ordre, de manière que les valeurs $w^{(1)} + dw^{(1)}$, $w^{(2)} + dw^{(2)}, \ldots$, correspondantes à $z + dz$, soient rangées respectivement à côté des valeurs $w^{(1)}, w^{(2)}, \ldots$, correspondantes à z et dont elles diffèrent infiniment peu, on formera ainsi plusieurs couches de valeurs de w, telles que w variera d'une manière con-

tinue dans chaque couche et que, d'une couche à l'autre, les valeurs de w correspondantes au même z ou à des z infiniment voisins différeront entre elles de quantités finies.

Il s'ensuit de là que, tant que les valeurs de $f(z)$ correspondantes à un même z seront distinctes et inégales, on ne pourra pas passer d'une couche de valeurs de w à une autre par une variation continue. Donc, en vertu de la condition de continuité, ces couches seront isolées les unes des autres, comme si les diverses déterminations de $f(z)$ formaient autant de fonctions distinctes, dont chacune serait uniforme et continue.

En d'autres termes, les courbes tracées par les différentes déterminations sur le plan des w, c'est-à-dire les différentes branches de la courbe totale des w, ne se rencontreront jamais en un point correspondant pour les deux à une même valeur de z.

Ainsi, la condition de continuité de chaque détermination de w isole les diverses déterminations les unes des autres.

1233. Il n'en serait plus de même si, pour une certaine valeur z_1 de z, deux déterminations $w^{(1)}$, $w^{(2)}$, distinctes en tout autre point, devenaient égales entre elles. Alors, en ce point z_1, rien ne distinguerait plus les deux couches de valeurs de w, et de la valeur commune w_1 on pourrait passer indifféremment, sans rompre la continuité, soit à la valeur $w_2^{(1)}$ correspondante à $z_2 = z_1 + dz_1$ dans la première couche, soit à la valeur $w_2^{(2)}$ correspondante au même z_2 dans la seconde couche.

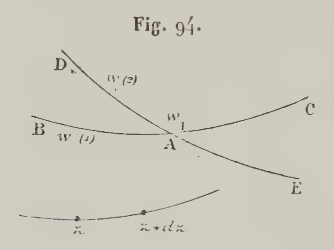
Autrement, les deux branches $w^{(1)}$, $w^{(2)}$ de la courbe w auraient un point d'intersection w_1 correspondant à la même valeur z_1 de la variable z, et, si l'on change z_1 en $z_1 + dz_1$, rien n'indiquerait plus à laquelle des deux branches doit être attribuée chacune des deux valeurs de $w_1 + \frac{dw_1}{dz}\,dz$, de sorte que la branche BA, par exemple (*fig.* 94), pourra aussi bien être continuée par la branche AE que par la branche AC, si l'on n'a pas entre les deux d'autres motifs de choix que la condition de continuité de chaque détermination de w.

Un tel point z_1, pour lequel se confondent deux ou plusieurs déterminations de la fonction w, et auquel correspond, par conséquent, un point w_1 d'où partent en divergeant les diverses

branches de la courbe w correspondantes à un chemin quelconque de z, se nomme un *point de ramification* de la fonction w.

Les points de ramification et les points de discontinuité d'une

Fig. 94.



fonction sont désignés sous le nom commun de *points critiques* de cette fonction.

1234. Les fonctions multiformes que l'on rencontre dans l'Analyse sont d'abord les racines d'une équation algébrique ou transcendante,

$$f(z, w) = 0,$$

entre la fonction w et la variable indépendante z. Nous n'entreprendrons pas ici l'étude du cas général, et nous nous bornerons à considérer le cas où l'équation est résoluble algébriquement par rapport à w.

Une autre classe de fonctions multiformes est celle des intégrales de fonctions présentant des points critiques.

1235. Étudions, pour commencer, quelques exemples de fonctions multiformes, racines d'équations algébriques.

I. Soit la fonction

$$w = \sqrt{z^2 - c^2},$$

déterminée par l'équation

$$w^2 - z^2 + c^2 = 0.$$

On peut l'écrire sous la forme

$$w = \sqrt{(z - c)(z + c)}.$$

Cette fonction admet deux déterminations, égales et de signes contraires, différant par suite entre elles d'une quantité finie tant que z ne sera pas égal à $\pm c$. Pour $z = \pm c$, les deux déterminations de w prennent la valeur commune zéro. Donc $z = + c$ et $z = - c$ sont deux points de ramification de la fonction w.

Pour distinguer l'une de l'autre les deux valeurs de w, mettons les deux facteurs sous le radical sous la forme

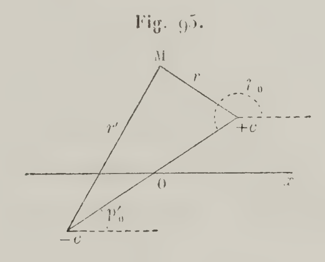
$$z - c = re^{ip}, \quad z + c = r'e^{ip'},$$

et, pour fixer les idées, supposons qu'au point $z = 0$ on attribue aux deux arguments p et p' des valeurs positives et moindres que 2π. On aura, pour la valeur de w correspondante à un z quelconque,

$$(1) \qquad w = \pm \sqrt{rr'}\, e^{i\frac{p+p'}{2}}.$$

La valeur initiale de p étant choisie comme nous l'avons fait, si, pour arriver de O en un point quelconque M (*fig.* 95), on fait suivre au point variable z un chemin quelconque, et si l'on imagine

Fig. 95.



que des points $+c$ et $-c$ partent deux rayons vecteurs aboutissant au point z et le suivant dans tout son parcours, chacun de ces rayons décrira autour de son extrémité fixe un angle de grandeur quelconque et parfaitement déterminé. Donc chacune des deux valeurs de w, que nous avons distinguées par les signes $+$ et $-$, sera aussi parfaitement déterminée. Ces deux valeurs ne cesseront pas d'être inégales tant que les rayons r et r' seront tous les deux différents de zéro.

1236. Si l'on fait décrire à z un contour fermé quelconque, ne

comprenant dans son intérieur aucun des deux points de ramification $+c$, $-c$, chacune des fonctions

$$w^{(1)} = +\sqrt{rr'}\,e^{i\frac{p+p'}{2}}, \quad w^{(2)} = -\sqrt{rr'}\,e^{i\frac{p+p'}{2}}$$

étant uniforme et continue dans cette aire, on pourra lui appliquer les théorèmes relatifs aux fonctions synectiques, et en particulier celui en vertu duquel chacune de ces fonctions arrive à la même valeur lorsqu'on fait passer z d'un point z_0 à un autre z suivant deux chemins différents, renfermés l'un et l'autre dans l'intérieur de cette aire. On voit aisément alors que chacun des angles p, p' arrivera en z avec la même valeur, quel que soit celui des deux chemins qu'on ait parcouru.

Dans ce cas, on pourra, sans changer la valeur finale de la fonction, retrancher de l'aire $\mathfrak{A}$, comprise dans le contour, des portions quelconques [1127], et par suite réduire cette aire à la droite qui joint les deux positions z_0 et z, *pourvu que cette droite soit tout entière contenue dans l'aire* $\mathfrak{A}$.

Si l'on considère l'accroissement $w - w_0$ de la fonction, correspondant au déplacement de z, comme l'intégrale des accroissements infiniment petits correspondants aux éléments infinitésimaux du chemin suivi par z, on voit que, dans l'hypothèse admise, on pourra remplacer l'intégrale prise le long d'un chemin quelconque contenu dans l'aire par l'intégrale prise le long du chemin rectiligne aboutissant aux mêmes extrémités. Nous donnerons, pour abréger, à cette dernière intégrale, le nom d'*intégrale rectiligne* prise entre les limites z_0 et z.

1237. Si la droite $\overline{z_0 z}$ passait précisément par l'un des points de ramification c, on éviterait ce point en remplaçant une portion de droite infiniment petite, prise de part et d'autre de c, par une portion de courbe, un demi-cercle par exemple, tournée dans un sens tel que le chemin rectiligne ainsi modifié et le chemin curviligne qu'il doit remplacer ne comprennent pas entre eux le point c.

Pour rendre ces faits sensibles par une image physique, imaginons un fil flexible étendu sur le chemin parcouru par z entre les points z_0 et z, et concevons aux points $+c$ et $-c$ deux obstacles verticaux, empêchant le cordon de passer par-dessus l'un ou l'autre

de ces points. Deux positions quelconques du fil pouvant se transformer l'une dans l'autre sans rencontrer les obstacles comprendront entre elles une aire qui ne renfermera pas ces obstacles, et, par suite, les variations de la fonction correspondantes à ces deux chemins seront identiques et elles seront égales à l'accroissement rectiligne si l'on peut redresser le fil sans rencontrer les obstacles.

Dans le cas où le chemin rectiligne passe par le point c, on s'avancera sur ce chemin à partir de z_0 jusqu'au point $z = c + re^{i\alpha}$, infiniment voisin de c, α étant l'argument de $z_0 - c$; puis on décrira du centre c et du rayon r un demi-cercle dans le sens des angles croissants ou décroissants, suivant que le rayon vecteur parcourant le chemin curviligne de z_0 en z fera le demi-tour de c dans le premier sens ou dans le second. On arrivera ainsi de l'autre côté de c avec une valeur de l'argument de $re^{i\alpha}$ égale à $\alpha \pm \pi$, et, par suite, le facteur

$$\sqrt{z - c} = \sqrt{r}\, e^{\frac{i\alpha}{2}}$$

deviendra soit

$$\sqrt{r}\, e^{\frac{i(\alpha + \pi)}{2}} = + i \sqrt{r}\, e^{\frac{i\alpha}{2}},$$

soit

$$\sqrt{r}\, e^{\frac{i(\alpha - \pi)}{2}} = - i \sqrt{r}\, e^{\frac{i\alpha}{2}},$$

suivant le sens dans lequel on aura contourné le point c. D'après cela, w arrivera en z avec l'une ou avec l'autre de ses déterminations, selon que l'on aura choisi l'un ou l'autre des deux demi-cercles pour remplacer le diamètre commun. Dans tous les cas, on aura le moyen de distinguer quel est celui qu'il faut choisir.

1238. Si l'on fait décrire au point z, autour du centre $+c$, un cercle assez petit pour ne pas contenir d'autre point critique que $+c$, l'angle p variant de 2π, $\frac{p}{2}$ variera de π, et par suite $\sqrt{r}\, e^{i\frac{p}{2}}$ sera multiplié par $e^{i\pi} = -1$. Donc, après avoir parcouru ce cercle, la valeur de w aura été multipliée par -1 et aura changé de détermination. Il en sera de même si z fait le tour de $-c$.

Si z parcourt une courbe fermée faisant n fois le tour de $+c$ et n' fois le tour de $-c$, les tours étant comptés positivement ou négativement suivant le sens du parcours, les deux facteurs de w

seront respectivement multipliés par

$$e^{ni\pi} = (-1)^n, \quad e^{n'i\pi} = (-1)^{n'},$$

et par suite w sera multiplié par $(-1)^{n+n'}$. Donc w changera ou ne changera pas de détermination, suivant que le nombre $n+n'$ sera impair ou pair.

1239. Supposons que w parte de l'origine avec une certaine détermination, qu'il se dirige vers un point critique c suivant un chemin rectiligne, qu'arrivé à une distance r de c, moindre que celle de c au point critique le plus voisin et que nous pourrons supposer infiniment petite, il quitte la droite Oc et décrive autour de c une circonférence entière qui le ramène sur la droite, et enfin qu'il revienne en O suivant la même droite. Le chemin ainsi parcouru sera dit un *contour élémentaire*, et nous désignerons par (c) le contour élémentaire relatif au point critique c.

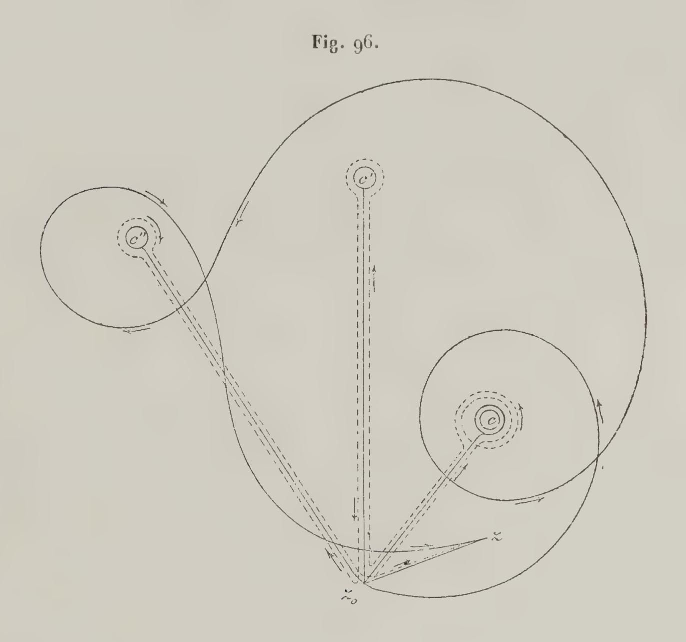
Si c, comme dans l'exemple actuel, est un point de ramification, w changera de détermination en parcourant le cercle qui entoure c, et, par suite, reviendra en O avec une valeur différente de celle qu'il avait au départ.

1240. Supposons maintenant un chemin quelconque, conduisant d'un point initial z_0 à un point final z et entourant les divers points critiques $c, c', c'', \ldots$ d'une fonction donnée w chacun un nombre quelconque de fois, et concevons, comme précédemment, un fil flexible appliqué sur ce chemin et des obstacles placés aux divers points critiques. Si l'on tend le fil, il commencera par se serrer autour des obstacles, en les entourant chacun un certain nombre de fois et en laissant entre eux des portions rectilignes. Détendons maintenant chacune de ces dernières, de manière à la remplacer par deux cordons rectilignes allant du point initial z_0 à chacun des deux obstacles. Nous aurons une transformation analogue à celle que représente la *fig.* 96. Les fils tendus entre les points critiques et le point initial z_0 se changeront, à la limite, en contours élémentaires, dont la partie circulaire sera parcourue un nombre quelconque de fois, positif ou négatif.

De cette manière, on pourra remplacer tout chemin de nature quelconque, allant de z_0 en z, par un système de contours élémen-

taires relatifs aux divers points critiques, lesquels devront être parcourus dans un ordre déterminé et chacun dans un certain sens et un certain nombre de fois, ce système étant suivi d'un chemin

Fig. 96.



rectiligne allant de z_0 à z, en évitant, s'il y a lieu, les points critiques, comme nous l'avons vu plus haut.

On voit donc qu'une fonction multiforme w, partant d'un point donné z_0 avec une détermination désignée, peut arriver en un autre point donné z avec telle ou telle détermination, suivant la nature du chemin parcouru par la variable z, et que, dans tous les cas, on pourra remplacer un chemin quelconque par un chemin composé d'une certaine combinaison des contours élémentaires relatifs aux divers points critiques, ces contours étant parcourus chacun un nombre de fois déterminé et dans un ordre convenable; puis d'un chemin rectiligne allant du point initial au point final, en évitant, dans un sens convenable, les points critiques qui pourraient se trouver sur son parcours.

1241. II. Prenons pour second exemple la fonction

$$w = \sqrt{z - c}. \tag{1}$$

Nous aurions à répéter sur cette fonction une grande partie de ce que nous avons dit à propos de la fonction $\sqrt{z^2 - c^2}$, dont la fonction (1) est un des facteurs. Ici c est le seul point de ramification situé à distance finie; mais il existe encore un second point de ramification, le point de l'infini, $z = \infty$.

En effet, si nous posons, en introduisant le rayon réciproque [**1114**], $z = \frac{1}{z'}$, il viendra

$$w = \sqrt{\frac{1}{z'} - c}.$$

En faisant

$$z' = re^{ip}, \quad 1 - cz' = r'e^{ip'},$$

il viendra

$$w = \sqrt{\frac{r'}{r}}\, e^{i\frac{p'-p}{2}},$$

expression qui change de signe si l'on fait le tour du point $z' = 0$. Donc $z' = 0$ ou $z = \infty$ est un point de ramification de la fonction $\sqrt{\frac{1}{z'} - c}$ ou $\sqrt{z - c}$.

Si l'on appliquait la même transformation à la fonction

$$w = \sqrt{z^2 - c^2},$$

qui deviendrait

$$w = \frac{1}{z'}\sqrt{1 - c^2 z'^2},$$

les points $z' = \pm\frac{1}{c}$ étant tous les deux en dehors du cercle infiniment petit tracé autour de $z' = 0$, la fonction w ne changerait pas de détermination en faisant le tour de ce cercle. Donc ici $z = \infty$ n'est pas un point de ramification.

On pourrait dire que ce point $z' = 0$ est le point où coïncident les points de ramification des deux facteurs $\frac{1}{+\sqrt{z'}}$, $\frac{1}{-\sqrt{z'}}$ de w, et que ces deux points de ramification se neutralisent mutuellement, parce qu'on ne peut faire le tour de l'un sans faire en même temps le tour de l'autre, et que les deux changements de signe simultanés de la fonction w se compensent.

Du reste, pour la fonction (1) $w = \sqrt{z - c}$, la présence du se-

cond point de ramification $z = \infty$ n'influe en rien sur la marche de la fonction, puisque toute révolution autour de l'un des deux points o et ∞ est en même temps une révolution autour de l'autre.

1242. III. En appliquant les mêmes raisonnements à la fonction

$$w = \sqrt{(z - c_1)(z - c_2)\ldots(z - c_n)},$$

on verra de la même manière que $z = \infty$ est ou n'est pas un point de ramification de w, suivant que n est impair ou pair, de sorte que, pour $n = 2\nu - 1$ comme pour $n = 2\nu$, le nombre total des points de ramification sera toujours 2ν.

Ainsi les deux fonctions

$$\sqrt{a + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3},$$
$$\sqrt{a + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4}$$

ont l'une et l'autre quatre points de ramification.

Dans le cas de $n = 2\nu - 1$, le contour qui enveloppe le seul point $z = \infty$ sur la sphère peut être considéré comme enveloppant, de l'autre côté, tous les $2\nu - 1$ autres points de ramification.

1243. IV. Considérons encore la fonction à trois déterminations

$$w = \sqrt[3]{(z - c_1)(z - c_2)(z - c_3)}.$$

En posant

$$z - c_1 = r_1 e^{ip_1}, \quad z - c_2 = r_2 e^{ip_2}, \quad z - c_3 = r_3 e^{ip_3},$$

w prendra la forme

$$w = \sqrt[3]{r_1 r_2 r_3}\, e^{i\frac{p_1 + p_2 + p_3}{3}},$$

On voit qu'une révolution autour du point c_1 augmente l'argument de w de $\frac{2\pi}{3}$; deux révolutions l'augmentent de $\frac{4\pi}{3}$, et trois révolutions l'augmentent de 2π, ce qui ramène w à sa première valeur. Ainsi, en désignant par $\alpha = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ une des deux racines cubiques complexes de l'unité, si l'on fait n_1 révolutions autour de c_1, n_2 autour de c_2, n_3 autour de c_3, w se trouvera multiplié par

$\alpha^{n_1+n_2+n_3}$, c'est-à-dire par un des trois facteurs $1, e^{\frac{2\pi i}{3}}, e^{\frac{4\pi i}{3}}$, suivant que l'on aura

$$n_1 + n_2 + n_3 \equiv 0,\ 1,\ 2 \qquad (\text{mod}.3).$$

1244. V. Si l'on avait pris

$$w = \sqrt[3]{(z - c_1)(z - c_2)},$$

en faisant $z = \frac{1}{z'}$, il viendrait

$$w = \sqrt[3]{\frac{(1 - c_1 z')(1 - c_2 z')}{z'^2}},$$

ou, en posant $z' = re^{ip}$,

$$w = \sqrt[3]{\frac{1}{r}} e^{-i\frac{2p}{3}} \sqrt[3]{(1 - c_1 z')(1 - c_2 z')}.$$

On verrait alors, comme précédemment, que, si l'on fait le tour (dans le sens rétrograde) du point O' du plan antipode [1114], w se trouvera multiplié par $e^{\frac{4\pi i}{3}}$, de sorte que $z' = 0$ ou $z = \infty$ est encore un point de ramification.

1245. VI. En général, si l'on considère la fonction

$$w = z^{\frac{m}{n}},$$

$\frac{m}{n}$ étant fractionnaire, O sera un point de ramification, puisque, en posant $z = re^{ip}$, on aura

$$w = r^{\frac{m}{n}} e^{i\frac{mp}{n}},$$

et, si la fraction $\frac{m}{n}$ est irréductible, w sera une fonction à n déterminations.

Si l'on pose maintenant $z = \frac{1}{z'}$ et $z' = r' e^{ip'}$, alors

$$w = r'^{-\frac{m}{n}} e^{-i\frac{mp'}{n}},$$

d'où l'on voit que w change encore de détermination lorsque z fait

le tour de $z' = 0$. Donc $z' = 0$ ou $z = \infty$ est encore un point de ramification.

On peut remarquer ici, comme au n° 11, que, si l'on considère la représentation sur la sphère, chaque révolution directe autour de $z = 0$ est en même temps une révolution rétrograde autour de $z' = 0$; de sorte que, lorsqu'on fait le tour de l'origine, on peut considérer ce chemin comme faisant le tour, dans le sens opposé, du point à l'infini.

1246. VII. Si l'on a

$$\begin{aligned} w &= \sqrt[n]{(z - c_1)\ldots(z - c_m)} \\ &= z'^{-\frac{m}{n}} \sqrt[n]{(1 - c_1 z')\ldots(1 - c_m z')}, \end{aligned}$$

$\frac{m}{n}$ étant fractionnaire, $z' = 0$ ou $z = \infty$ sera un point de ramification, et si l'on décrit en sens direct un chemin renfermant dans son intérieur tous les points de ramification $c_1, \ldots, c_m$, on pourra considérer ce chemin comme entourant le seul point ∞, dans le sens rétrograde par rapport à ce point.

1247. VIII. Lorsque, dans l'exemple précédent, k des points de ramification $c_1, \ldots, c_k$ viennent à coïncider, alors la valeur de w peut se mettre sous la forme

$$w = (z - c_1)^{\frac{k}{n}} \sqrt[n]{(z - c_{k+1})\ldots(z - c_m)},$$

et l'on voit qu'une révolution autour de c_1 équivaut à k révolutions autour d'un point de ramification simple ou à une révolution suivant une courbe embrassant dans son intérieur k points de ramification différents.

Si $\frac{k}{n}$ est entier, c_1 cessera d'être un point de ramification.

On voit maintenant sans peine comment on discuterait le cas d'une fonction formée par l'addition de plusieurs fonctions multiformes, ou plus généralement par la combinaison de plusieurs opérations algébriques multiformes quelconques.

§ II.

DES INTÉGRALES MULTIFORMES.

1248. Étudions maintenant l'autre classe de fonctions multiformes dont nous avons parlé au n° **1234**, celle des fonctions provenant de l'intégration d'une fonction algébrique uniforme ou multiforme présentant des infinis.

Soit $f(z)$ une fonction de la variable z, et supposons-la d'abord uniforme et continue à l'intérieur de l'aire $\mathfrak{A}$, sauf en certains points $c_1, c_2, \ldots$ de cette aire, où elle présente des infinis proprement dits.

Supposons que l'on fasse suivre à la variable z une ligne continue $\mathfrak{J}$, tracée d'une manière quelconque entre deux points donnés z_0 et z, dans le plan des z ou sur la sphère de référence; nous appellerons cette ligne le *chemin d'intégration*. Si l'on fait la somme des produits de chaque élément dz de ce chemin par la valeur correspondante $f(z)$ de la fonction, la limite de cette somme sera l'intégrale de la fonction, correspondante au chemin d'intégration $\mathfrak{J}$.

Pour que l'intégration soit toujours possible, il faut que le chemin d'intégration $\mathfrak{J}$ ne passe par aucun point dans le voisinage duquel à une variation infiniment petite dz ne corresponde pas une variation infiniment petite de l'intégrale elle-même, comme cela pourrait avoir lieu si la fonction $f(z)$ devenait infinie en ce point. Nous supposerons toujours que, si le chemin d'intégration contenait un tel point, on l'éviterait en faisant un détour infiniment petit, sauf à discuter l'influence que le sens dans lequel on a fait ce détour peut avoir sur le résultat.

Lorsque le chemin $\mathfrak{J}$ se réduit à une ligne droite, l'intégrale est dite l'*intégrale rectiligne* de la fonction $f(z)\,dz$, prise entre les limites z_0 et z, et nous la représenterons simplement par la notation

$$\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz.$$

1249. Si entre la droite $\overline{z_0 z}$ et le chemin $\mathfrak{J}$ il ne se trouve aucun point critique de la fonction $f(z)$, nous avons vu [**1125**] que les

intégrales prises le long des deux chemins ont la même valeur. Donc l'intégrale prise le long de $\mathfrak{I}$ pourra, dans ce cas, être représentée aussi par la notation $\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz$.

Si, au contraire, l'aire comprise entre $\mathfrak{I}$ et la droite $\overline{z_0 z}$ renferme un ou plusieurs infinis $c_1, c_2, \ldots$ de $f(z)$, nous avons vu que la différence entre l'intégrale prise suivant $\mathfrak{I}$ et l'intégrale rectiligne est la somme des intégrales $\int_{c_1}, \int_{c_2}, \cdots$ prises autour de ces infinis. Cette différence restera constante, tant que z variera de manière que l'aire comprise entre les deux chemins contienne toujours les mêmes infinis, et que les deux chemins d'intégration entourent chaque infini le même nombre de fois.

Pour plus de clarté, nous commencerons toujours, ainsi que nous l'avons fait plus haut, par remplacer le chemin $\mathfrak{I}$ par le chemin rectiligne, précédé des contours élémentaires relatifs aux divers points critiques renfermés entre $\mathfrak{I}$ et le chemin rectiligne, en tenant compte du nombre de fois que chaque contour élémentaire est décrit, et du sens dans lequel il a été décrit chaque fois.

Si le chemin rectiligne passait lui-même par un des points critiques, on éviterait ce point au moyen d'un demi-cercle infiniment petit décrit autour de ce point comme centre et tourné dans un sens convenable, la valeur de l'intégrale rectiligne variant généralement avec le sens que l'on a choisi pour ce demi-cercle.

1250. On voit que l'intégration d'une fonction uniforme $f(z)$, qui a des infinis, engendre une fonction multiforme, susceptible de prendre en chaque point donné du plan une infinité de valeurs, dont les différences dépendent des chemins parcourus par la variable d'intégration et sont exprimées par des sommes de multiples, positifs ou négatifs, des intégrales prises autour de ces divers infinis.

Chacune de ces dernières intégrales s'appelle une *période* de l'intégrale $\int f(z)\,dz$. Ainsi, si l'on représente par $\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz$ l'intégrale rectiligne et par $\int_{c_1}, \int_{c_2}, \cdots$ les périodes correspondantes aux infinis $c_1, c_2, \ldots$ compris entre le chemin d'intégration $\mathfrak{I}$ et le chemin rectiligne, la valeur générale de l'intégrale $\int f(z)\,dz$,

pour un chemin quelconque $\mathfrak{I}$ allant de z_0 en z, sera

$$n_1 \int_{c_1} + n_2 \int_{c_2} + \cdots + \int_{z_0}^{z} f(z)\,dz,$$

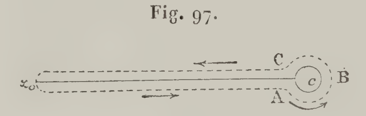
n_1, n_2, ... étant des entiers positifs, nuls ou négatifs.

1251. Lorsque, après avoir fait le tour d'un infini c, la variable z revient à sa première position, l'intégrale u aura crû de $\int_c$, et, par suite, elle aura changé de détermination si $\int_c$ n'est pas nul.

Si, après avoir parcouru un chemin $z_0\,c$ et avoir fait le tour de c sur le cercle infiniment petit, z revient en z_0 suivant le même chemin, u aura changé de détermination et décrira, par conséquent, sur son plan ou sa sphère de représentation, une courbe différente de la première. Quand le point correspondant à c est un infini de u, les deux branches de courbe décrites sur la sphère des u partiront du pôle inférieur. Dans tous les cas, la courbe décrite par u se ramifie à partir du point u correspondant à c; donc ce point c est généralement un point de ramification de la fonction u.

1252. *Des intégrales prises le long d'un contour élémentaire.* — Soit c un point critique de la fonction $f(z)$, et considérons le contour élémentaire formé d'un cercle infiniment petit tracé autour de c et d'une droite joignant le point initial z_0 de l'intégrale $\int f(z)\,dz$ à un point de ce cercle. On pourra, comme dans le n° 1240, considérer ce contour élémentaire comme la limite d'un chemin composé des deux parallèles infiniment voisines z_0A et Cz_0, et de l'arc ABC (*fig.* 97), infiniment peu différent de la circonférence entière. L'intégrale prise le long du contour élémentaire sera la limite de la somme des trois intégrales

Fig. 97.



$$\int(z_0\,A) + \int(ABC) + \int(C\,z_0).$$

Supposons d'abord que le point critique c ne soit pas un point de ramification. Alors, en revenant, après avoir fait le tour du cercle, à une position C infiniment voisine de A, la fonction $f(z)$ reprendra, à la limite, la même valeur qu'en A, et les éléments de l'intégrale le long du chemin Cz_0 seront égaux et de signe contraire à ceux de l'intégrale le long de $z_0 A$. Donc les deux intégrales $\int(z_0 A)$ et $\int(Cz_0)$ se détruiront, et l'intégrale prise le long du contour élémentaire se réduira à la seule intégrale $\int(ABCA)$, c'est-à-dire à l'intégrale $\int_c$ prise autour de c, comptée positivement ou négativement selon que le cercle sera parcouru dans le sens direct ou dans le sens rétrograde.

1253. Supposons maintenant que $f(z)$ soit une fonction multiforme, ayant un point de ramification en c. L'intégrale prise le long du contour élémentaire, parcouru dans le sens direct, sera, comme précédemment, la limite de la somme

$$\int(z_0 A) + \int(ABC) + \int(C z_0).$$

Or, en passant de A au point infiniment voisin C, la fonction $f(z)$ aura changé de détermination, et, si elle est partie de A avec la valeur $f_1(z)$, elle aura en C une autre valeur $f_2(z)$. On aura donc

$$\int(z_0 A) = \int_{z_0}^{c-\varepsilon} f_1(z)\,dz, \quad \int(C z_0) = -\int_{z_0}^{c-\varepsilon} f_2(z)\,dz.$$

Donc la somme $\int(z_0 A) + \int(C z_0)$ aura pour limite

$$\int_{z^0}^{c} [f_1(z) - f_2(z)]\,dz,$$

ce qui ne s'annulera pas, comme dans le cas précédent.

Si l'on a $f_2(z) = -f_1(z)$, cette somme sera égale à

$$2\int_{z_0}^{c} f_1(z)\,dz = -2\int_{z_0}^{c} f_2(z)\,dz.$$

Quant à l'intégrale $\int(ABC)$, elle peut, suivant la nature de la fonction f, être ou nulle ou différente de zéro.

Si l'on avait parcouru le contour élémentaire dans le sens opposé,

en partant de z_0 avec la même détermination $f_1(z)$, la partie rectiligne de l'intégrale serait toujours

$$\int_{z_0}^{c} [f_1(z) - f_2(z)]dz;$$

mais l'intégrale circulaire $\int(\mathrm{ABC})$ serait remplacée par l'intégrale de signe contraire

$$\int(\mathrm{CBA}) = -\int(\mathrm{ABC}).$$

Si l'intégrale circulaire est nulle, l'intégrale prise le long du contour élémentaire sera indépendante du sens dans lequel ce contour sera parcouru.

1254. Soit un point de ramification c, et soit Γ l'intégrale prise le long du contour élémentaire (c) correspondant à ce point. Supposons l'intégrale circulaire $\int_c$ nulle, et la fonction $f(z)$ susceptible des deux valeurs égales et opposées $f_1(z)$ et $f_2(z) = -f_1(z)$.

Après que l'on aura parcouru une première fois le contour élémentaire, la fonction $f(z)$, partie de z_0 avec la valeur $f_1(z)$, y reviendra avec la valeur $-f_1(z)$. Si l'on parcourt maintenant de nouveau le contour élémentaire, l'intégrale, prise en partant de z_0 avec la valeur $-f_1(z)$, aura tous ses éléments égaux et de signe contraire à ceux de l'intégrale précédente; elle aura donc pour valeur $-\Gamma$, et par suite, en l'ajoutant à la première, on aura zéro pour l'intégrale correspondante à deux parcours consécutifs du contour élémentaire.

On verra de même que, si l'on fait m intégrations consécutives le long du contour (c), le résultat sera égal à

$$\frac{1 - (-1)^m}{2}\Gamma,$$

c'est-à-dire à Γ ou à zéro, suivant que m sera impair ou pair.

1255. Soit c' un second point de ramification de la même fonction biforme, et supposons-le tel que $\int(c')$ [1] soit égale à $-\int(c)$ lorsque les deux intégrales sont prises en partant de la même dé-

---

[1] En désignant par $\int(c')$ l'intégrale prise le long du contour élémentaire (c').

termination de $f(z)$. Après que l'on aura intégré le long de (c), $f(z)$ aura changé de signe, et $\int(c')$, calculée en partant de la détermination $-f_1(z)$, aura pour valeur $+\Gamma$. Donc $\int(c)$, suivie de $\int(c')$, donnera pour valeur 2Γ. On conclut de là que, si l'on fait une série de n intégrations consécutives en parcourant tour à tour d'abord le contour (c), puis le contour (c'), on aura pour résultat $+n\Gamma$.

Si, au lieu de commencer cette série d'intégrations par le contour (c), on avait commencé par (c'), le résultat aurait été $-n\Gamma$.

Exemple. — Soit l'intégrale

$$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{c^2 - z^2}}.$$

La fonction sous le signe $\int$ a deux points de ramification, $+c$ et $-c$. Supposons que le radical parte de $z = 0$ avec la valeur $+c$.

Si l'on intègre le long du cercle infinitésimal qui entoure le point c, en posant

$$c - z = re^{ip}, \quad \text{d'où} \quad dz = -re^{ip}.i\,dp,$$

l'intégrale sera

$$-\int_0^{2\pi} \frac{re^{ip}.i\,dp}{\sqrt{re^{ip}(2c - re^{ip})}} = -i\sqrt{r}\int_0^{2\pi} \frac{e^{\frac{1}{2}ip}\,dp}{\sqrt{2c - re^{ip}}},$$

et sa valeur s'annulera évidemment avec r. L'intégrale circulaire étant nulle, on pourra donc appliquer le résultat précédent. Donc, en intégrant n fois de suite le long des contours respectifs $(+c)$, $(-c)$, $(+c)$, ..., $([-1]^{n-1}c)$, on aura pour intégrale totale

$$+n\Gamma = 2n\int_0^c \frac{dz}{\sqrt{c^2 - z^2}}.$$

Au contraire, si l'on avait pris les contours élémentaires dans l'ordre

$$(-c),\ (+c),\ (-c),\ \ldots,\ ([-1]^n c),$$

la valeur de l'intégrale totale aurait été $-n\Gamma$.

On voit, dans ce cas, que, sans changer l'intégrale rectiligne

$f(\overline{z_0 z_1})$, on pourra augmenter ou diminuer l'intégrale curviligne $\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz$ d'un multiple quelconque de Γ.

Lorsque deux points de ramification jouissent des propriétés des deux points c, c' dont nous venons de parler, nous leur donnons le nom de points de ramification *complémentaires*.

§ III.

EXEMPLES D'INTÉGRALES PÉRIODIQUES.

1256. I. Soit l'intégrale

$$u = \int_{1}^{z} \frac{dz}{z}.$$

La fonction $\frac{1}{z}$ ayant un infini pour $z = 0$, ce point sera un point critique de l'intégrale u.

Si nous posons

$$z = re^{ip}, \quad \text{d'où} \quad dz = ire^{ip}\,dp, \quad \frac{dz}{z} = i\,dp,$$

l'intégrale circulaire prise autour du point $z = 0$ sera

$$\int_{0} \frac{dz}{z} = \int_{0}^{2\pi} i\,dp = 2i\pi.$$

Ce sera là la période de l'intégrale proposée, dont la valeur générale sera, par conséquent, égale à l'intégrale rectiligne $\int_{1}^{z} \frac{dz}{z}$, plus un multiple quelconque, positif ou négatif, de cette période.

1257. II. L'intégrale $\int \frac{dz}{1 - z^2}$ a deux points critiques, correspondants à $z = \pm 1$. En posant $c = \pm 1$ et $z - c = re^{ip}$, on aura, sur un cercle décrit autour de c,

$$dz = ire^{ip}\,dp,$$

$$1 - z^2 = c^2 - z^2 = (c + z)(c - z) = -(2c + re^{ip})re^{ip};$$

donc [1129]

$$\int_c \frac{dz}{1-z^2} = 2i\pi \lim_{z=c} (z-c)\frac{1}{c^2-z^2} = -2i\pi\frac{1}{2c} = \mp i\pi.$$

Donc les deux périodes de l'intégrale sont égales au signe près; par suite, la valeur générale de l'intégrale prise entre les limites z_0 et z sera

$$\int_{z_0}^{z} \frac{dz}{1-z^2} + n_1(-i\pi) + n_2(+i\pi),$$

n_1 et n_2 étant des entiers quelconques, ou, plus simplement,

$$\int_{z_0}^{z} \frac{dz}{1-z^2} + ni\pi,$$

l'entier n étant égal au nombre de fois que le chemin d'intégration a entouré (dans le sens direct) le point -1, moins le nombre de fois qu'il a entouré le point $+1$, les tours faits dans le sens rétrograde devant être comptés négativement.

On verrait de même que la valeur générale de l'intégrale $\int \frac{dz}{1+z^2}$ est

$$\int_{z_0}^{z} \frac{dz}{1+z^2} + n\pi.$$

Cette intégrale et la précédente sont des cas particuliers de l'intégrale

$$\int_0^z \frac{dz}{1-e^{2i\alpha}z^2},$$

qui a les deux points critiques

$$c_1 = +e^{-i\alpha}, \quad c_2 = -e^{-i\alpha}.$$

En posant $1-e^{i\alpha}z = re^{ip}$, l'intégrale prise autour de c_1,

$$\int_0^{2\pi} \frac{-e^{i\alpha}.ire^{ip}\,dp}{re^{ip}(2-re^{ip})} = -\frac{i}{2}e^{-i\alpha}\int_0^{2\pi}\frac{dp}{1-\frac{1}{2}re^{ip}},$$

aura pour limite correspondante à $r=0$

$$-i\pi e^{-i\alpha},$$

et, de même, l'intégrale prise le long de l'autre point critique sera

$$+ i\pi e^{-i\alpha}.$$

Ces deux périodes étant égales et de signes contraires, on en conclut que la valeur générale de l'intégrale sera l'intégrale rectiligne, plus un multiple quelconque de $i\pi e^{-i\alpha}$.

En faisant tour à tour $\alpha = 0$ et $\alpha = \frac{\pi}{2}$, on retrouvera les résultats relatifs aux deux intégrales précédentes.

1258. III. Soit l'intégrale

$$\int \frac{mz + n}{z^2 + az + b}\, dz,$$

que l'on peut mettre sous la forme

$$\int \frac{mz + n}{(z - c_1)(z - c_2)}\, dz.$$

Les intégrales prises autour des deux points critiques c_1, c_2 auront pour valeurs respectives

$$\int_{c_1} = \frac{mc_1 + n}{c_1 - c_2}\, 2i\pi, \qquad \int_{c_2} = \frac{mc_2 + n}{c_2 - c_1}\, 2i\pi.$$

L'intégrale a donc deux périodes différentes tant que, les deux quantités c_1, c_2 étant différentes, m ne sera pas nul. On a donc ici un exemple d'une intégrale à double période dont la valeur générale est égale à l'intégrale rectiligne augmentée de multiples quelconques $\mu_1 \int_{c_1} + \mu_2 \int_{c_2}$ des deux périodes.

Si $m = 0$, alors les deux périodes, étant égales au signe près, n'en feront plus qu'une seule, comme dans le cas précédent.

1259. IV. Considérons maintenant l'intégrale d'une fonction multiforme

$$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}}.$$

Les points de ramification $z = +1$ et $z = -1$ sont en même temps des infinis de la différentielle.

Si nous posons

$$z - c = re^{ip},$$

c représentant ± 1, l'intégrale prise autour de c aura pour valeur

$$\int_0^{2\pi} \frac{ire^{ip}\,dp}{\sqrt{-re^{ip}(2c + re^{ip})}} = \pm\sqrt{r}\int_0^{2\pi} \frac{e^{\frac{1}{2}ip}\,dp}{\sqrt{2c + re^{ip}}},$$

et, pour r infiniment petit, cette expression a évidemment pour limite zéro. Donc ici les deux intégrales circulaires sont nulles.

Si maintenant on suppose que le radical parte du point $z = 0$ avec la détermination $+1$, l'intégrale rectiligne prise de $z = 0$ à $z = 1 - r$ aura, pour r infiniment petit, une certaine limite, que nous désignerons provisoirement par $\varkappa$.

Après que z aura fait le tour du point $+1$, $\sqrt{1 - z^2}$ aura changé de détermination, et, d'après ce que nous avons vu au n° 1255, l'intégrale prise de $+1$ à 0 aura encore la valeur $\varkappa$, de sorte que l'intégrale relative au contour élémentaire $(+1)$ aura pour valeur $+2\varkappa$, lorsqu'on suppose à $\sqrt{1 - z^2}$ la valeur initiale $+1$.

On verrait pareillement que, dans la même hypothèse, l'intégrale relative au contour élémentaire (-1) aura pour valeur $2\varkappa$.

On conclut de là, comme au n° 1255, que, si l'on parcourt alternativement les deux contours élémentaires, en prenant $+1$ pour valeur initiale de $\sqrt{1 - z^2}$, la somme des intégrales élémentaires, après n parcours, sera $\pm 2n\varkappa$, suivant que l'on aura commencé par le contour $(+1)$ ou par le contour (-1).

Si l'on parcourt le même contour, $(+1)$ par exemple, m fois consécutives, le résultat sera, d'après ce que nous avons vu,

$$\frac{1 - (-1)^m}{2} \cdot 2\varkappa = \varkappa - (-1)^m \varkappa,$$

c'est-à-dire $2\varkappa$ ou zéro, suivant que m sera impair ou pair. Après ces m parcours, $\sqrt{1 - z^2}$ se trouvera multiplié par $(-1)^m$; si l'on fait maintenant m_1 fois le tour de (-1), on ajoutera à la valeur précédente

$$(-1)^m[\varkappa - (-1)^{m_1}\varkappa],$$

ce qui donnera en totalité

$$\varkappa - 2(-1)^m\varkappa + (-1)^{m+m_1}\varkappa.$$

Si l'on fait ensuite m_2 fois le tour de $(+1)$, le radical partant de o avec la valeur $(-1)^{m+m_1}$, on ajoutera à la valeur précédente $(-1)^{m+m_1}[\varkappa-(-1)^{m_2}\varkappa]$, ce qui donnera en totalité

$$\varkappa-2(-1)^m\varkappa+2(-1)^{m+m_1}\varkappa-(-1)^{m+m_1+m_2}\varkappa.$$

Et ainsi de suite.

On voit que cette expression représentera toujours un multiple pair de $\varkappa$, et que, de plus, on pourra toujours disposer du nombre des changements alternatifs de contours et de la parité de chacun des nombres $m, m_1, \ldots,$ de manière que la partie de l'intégrale ajoutée à l'intégrale rectiligne soit égale à un multiple quelconque de $2\varkappa$.

1260. Il est facile de déterminer cette intégrale $2\varkappa$, en nous appuyant uniquement sur le théorème de Cauchy [**1124**]. En effet, cette intégrale est égale à l'intégrale prise le long d'un contour fermé quelconque, renfermant dans son intérieur le seul point critique $+1$. Prenons pour ce contour celui d'un demi-cercle de centre O, de rayon r infiniment grand, et ayant son diamètre dirigé suivant l'axe des y. L'intégrale prise le long du demi-diamètre à partir de O, suivant le sens direct, sera, en posant $z=iy$,

$$\int_0^{-ir}\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}=i\int_0^{-r}\frac{dy}{\sqrt{1+y^2}}=-ih^2,$$

h^2 désignant une valeur positive quelconque. L'intégrale prise le long de la demi-circonférence sera, en posant $z=re^{ip}$,

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\frac{re^{ip}\,idp}{\sqrt{1-r^2e^{2ip}}}=\pm\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\frac{dp}{\sqrt{1-r^{-2}e^{-2ip}}},$$

expression qui, pour r infiniment grand, a pour valeur $\pm\pi+\varepsilon$, ε étant infiniment petit. La troisième partie de l'intégrale sera

$$\int_{ir}^{0}\frac{dz}{\pm\sqrt{1-z^2}}=\pm i\int_r^0\frac{dy}{\sqrt{1+y^2}}=\mp ih^2,$$

h^2 ayant la même valeur que ci-dessus. En égalant la somme de ces trois intégrales à l'intégrale positive $2\varkappa$, prise le long du contour

$(+1)$, on aura

$$2\varkappa = -ih^2 \pm \pi + \delta \mp ih^2,$$

d'où, en égalant séparément les parties réelles et les parties imaginaires, et négligeant l'infiniment petit δ, on déterminera les signes ambigus, et l'on aura

$$2\varkappa = \pi, \quad \varkappa = \frac{\pi}{2}.$$

1261. Ainsi l'intégrale prise le long d'un des deux contours élémentaires est égale à $\pm\pi$. Si, avant de former l'intégrale rectiligne

$$u = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}},$$

on parcourt un seul contour élémentaire, et que l'on intègre ensuite rectilinéairement de o à z, le radical ayant changé de détermination, l'intégrale rectiligne changera de signe, et l'on obtiendra pour résultat

$$\pm\pi - u.$$

Si, au lieu d'un seul contour, on en parcourt deux, soit deux fois le même, soit deux contours différents, le radical reprenant son premier signe, on obtiendra pour l'intégrale totale

$$\pm\pi \pm \pi + u,$$

c'est-à-dire une des trois valeurs

$$u, \quad u + 2\pi, \quad u - 2\pi.$$

En continuant ce raisonnement, on verra qu'à une limite supérieure donnée z correspondent des valeurs de l'intégrale des deux formes

$$+u + 2m\pi, \quad -u + (2m+1)\pi,$$

ou, ce qui revient au même, de la forme

$$n\pi + (-1)^n u.$$

1262. V. Étudions enfin l'intégrale elliptique de première espèce

$$u = \int_0^z \frac{dz}{\mathrm{R}(z)},$$

où l'on a posé

$$R(z) = \sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)},$$

k^2 étant un nombre positif et moindre que l'unité.

Les infinis de la différentielle, ± 1 et $\pm \frac{1}{k}$, sont en même temps des points de ramification, comme dans l'exemple précédent.

Comme les points $+1$ et -1 se trouvent respectivement sur les droites qui joignent l'origine zéro aux deux autres points critiques $+\frac{1}{k}$ et $-\frac{1}{k}$, il faudra, dans les contours élémentaires relatifs à ces derniers, éviter les premiers par un détour infiniment petit, que nous supposerons fait suivant deux demi-circonférences situées la première au-dessus, la seconde au-dessous de l'axe des x, de manière à laisser l'un et l'autre des points ± 1 sur sa droite, en allant de o à $\pm \frac{1}{k}$.

Cela posé, imaginons que $R(z)$ parte de zéro avec la valeur $+1$ et parcoure le contour élémentaire $(+1)$. L'intégrale prise de zéro à $1 - r$,

$$\int_0^{1-r} \frac{dz}{R(z)} = \text{moy.} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 z^2}} \times \int_0^{1-r} \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}},$$

croît continuellement pour r décroissant. Le premier facteur est toujours compris entre 1 et $\frac{1}{\sqrt{1 - k^2}}$; le second a pour limite $\frac{\pi}{2}$. Donc l'intégrale a une limite finie, plus grande que $\frac{\pi}{2}$. Nous désignerons cette limite par

$$K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}}.$$

Faisons maintenant

$$1 - z = re^{ip}, \quad \text{d'où} \quad R(z) = r^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}ip} \sqrt{Z},$$

Z désignant un polynôme du troisième degré qui n'est pas nul dans le voisinage de $z = +1$. Il viendra

$$\frac{dz}{R(z)} = -\frac{r^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}ip}\, i\, dp}{\sqrt{Z}},$$

et, par suite, l'intégrale circulaire

$$-ir^{\frac{1}{2}}\int_0^{2\pi}\frac{e^{\frac{1}{2}ip}\,dp}{\sqrt{Z}}$$

tendra, pour r infiniment petit, vers la limite zéro.

Après avoir fait le tour du point $+1$, p ayant crû de 2π et Z ayant repris sa première valeur, le facteur $e^{\frac{1}{2}ip}$ aura changé de signe, et, par suite, $R(z)$ aura changé de détermination. Donc l'intégrale $\int_1^0 \frac{dz}{R(z)}$ sera égale en grandeur et en signe à l'intégrale précédente $\int_0^1 \frac{dz}{R(z)} = K$, et, par suite, $R(z)$ reviendra en O avec la valeur -1, et l'intégrale prise le long du contour élémentaire $(+1)$ sera égale à $+2K$ [1255].

On verrait de même que, si l'on fait le tour du point -1, $R(z)$ partant toujours de O avec la valeur $+1$, l'intégrale reviendra en O avec la valeur $-2K$.

Si l'on désigne par u la valeur de l'intégrale rectiligne

$$u = \int_0^z \frac{dz}{R(z)},$$

où $R(z)$ part de O avec la valeur $+1$, et que, au lieu de commencer par décrire le chemin rectiligne Oz, on décrive d'abord le contour élémentaire $(+1)$, l'intégrale $\int_0^z$ se composera de l'intégrale $\int(+1) = 2K$, plus l'intégrale rectiligne, où $R(z)$ partira cette fois de O avec la valeur -1, et qui aura, par suite, pour valeur $-u$. Donc l'intégrale totale sera égale à $2K - u$.

Si l'on parcourt deux fois de suite le contour $(+1)$, la seconde intégrale prise le long de ce contour détruira la première, et l'intégrale $\int_0^z$ redeviendra égale à u.

Mais si l'on parcourt d'abord une fois le contour $(+1)$, puis une fois le contour (-1), la somme des deux intégrales correspondantes sera $+4K$, et, $R(z)$ étant revenu en O avec la valeur $+1$,

l'intégrale $\int_0^z$ aura pour valeur $4K + u$. Et ainsi de suite, comme pour l'intégrale de l'exemple précédent $\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$.

1263. Considérons maintenant le contour élémentaire $\left(+\frac{1}{k}\right)$. Nous avons dit que la partie rectiligne de ce contour devait faire un détour pour éviter le point $+1$. Apprécions l'influence de ce détour.

Le point z, arrivé en $1-r$, s'écarte alors de la droite $\overline{O1}$ et prend une valeur $1+re^{ip}$, p devant varier de π à 0, en contournant $+1$ dans le sens rétrograde. D'après cela, le facteur $\sqrt{1-z}$ de $R(z)$ prendra la forme $\sqrt{-re^{ip}}$, et l'intégrale $\int \frac{dz}{R(z)}$, prise le long du demi-cercle, deviendra de la forme $\pm r^{\frac{1}{2}} \int_\pi^0 \frac{e^{\frac{1}{2}ip}\,dp}{\sqrt{Z}}$, Z étant le même polynôme que tout à l'heure.

Le dénominateur $\sqrt{Z}$ ne change pas de signe pendant que z varie de $1-r$ à $1+r$ ou que p varie de π à 0. Son signe sera $+$ si l'on suppose, comme nous pouvons le faire, que l'autre facteur $\sqrt{1-z}$ soit parti de O avec la valeur $+1$. Dans ce cas, pour $p=\pi$, $\sqrt{1-z} = \sqrt{-re^{ip}} = \pm\sqrt{r}\left(i\cos\frac{p}{2} - \sin\frac{p}{2}\right)$ doit être réel et positif, ce qui exige que l'on prenne le radical avec le signe —. Dès lors,

$$\sqrt{1-z} = -\sqrt{r}\left(i\cos\frac{p}{2} - \sin\frac{p}{2}\right)$$

prendra, pour $z=1+r$ ou $p=0$, la valeur $-i\sqrt{r}$, c'est-à-dire une valeur imaginaire négative de la forme $-ih^2$. Le radical $R(z)$ sera donc aussi de la même forme entre $+1$ et $+\frac{1}{k}$, et, par suite, $\frac{dz}{R(z)}$ sera dans cet intervalle de la forme $+ih^2$. Il en sera donc de même de l'intégrale

$$\int_{1+r}^{\frac{1}{k}-r'} \frac{dz}{R(z)},$$

qui tend, comme il est facile de le voir, vers une limite finie. Nous désignerons cette limite par (¹)

$$\int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dz}{R(z)} = i K'.$$

Donc la valeur de l'intégrale sur la partie rectiligne du contour $\left(+\frac{1}{k}\right)$ sera (²)

$$\int_0^{\frac{1}{k}} \frac{dz}{R(z)} = K + iK'.$$

Si l'on achève de parcourir le contour élémentaire $\left(+\frac{1}{k}\right)$ en revenant en O par le même chemin rectiligne, c'est-à-dire en évitant $+1$ au moyen d'un demi-cercle *supérieur*, on verra qu'ici encore l'intégrale circulaire sera nulle et la seconde intégrale rectiligne $\int_{\frac{1}{k}}^{0}$ sera égale à la première. Donc l'intégrale relative au contour élémentaire $\left(+\frac{1}{k}\right)$ a pour valeur (³)

$$\int\left(+\frac{1}{k}\right) = 2K + 2iK'.$$

(¹) Si l'on pose $k'^2 = 1 - k^2$ et $z^2 = \frac{1}{1 - k'^2 z'^2}$, l'intégrale $\int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dz}{R(z)}$ deviendra

$$i\int_0^1 \frac{dz'}{\sqrt{1 - z'^2}\sqrt{1 - k'^2 z'^2}} = iK',$$

K' étant ce que devient K lorsqu'on remplace k par k'.

(²) Si l'on avait évité le point $+1$ au moyen d'un demi-cercle situé *au-dessous* de l'axe Ox, on aurait eu pour l'intégrale semi-circulaire une valeur de sens contraire; Z aurait été de la forme $+ik^2$ entre $+1$ et $+\frac{1}{k}$, et $\int_1^{\frac{1}{k}}$ aurait eu pour valeur $-iK'$, d'où $\int_0^{\frac{1}{k}} = K - iK'$.

(³) Si l'on avait suivi les deux fois le demi-cercle inférieur, on aurait trouvé cette intégrale $= 2K - 2iK'$.

Le contour élémentaire $\left(-\frac{1}{k}\right)$ étant symétrique du contour $\left(+\frac{1}{k}\right)$ par rapport à l'origine, $\int\left(-\frac{1}{k}\right)$ sera égale et de signe contraire à $\int\left(+\frac{1}{k}\right)$, et, par suite, sa valeur sera $-2K-2iK'$.

1264. Supposons actuellement que z, partant du point O, suive l'axe des x positifs, en passant *au-dessus* des deux points de ramification $+1$ et $+\frac{1}{k}$, jusqu'à une distance infiniment grande $\mathfrak{r}$; puis, qu'il décrive autour de O un quart de cercle de rayon $\mathfrak{r}$, jusqu'à la rencontre avec l'axe des y au point $z = i\mathfrak{r}$; et enfin qu'il revienne en O en suivant l'axe des y. Le contour suivi ne renfermant dans son intérieur aucun point critique, l'intégrale prise le long de ce contour devra être nulle.

Or, de O à $\frac{1}{k}$, l'intégrale est égale à $K + iK'$. De $\frac{1}{k}$ à la valeur infiniment grande $\mathfrak{r}$, l'intégrale différera infiniment peu de sa limite

$$\int_{\frac{1}{k}}^{\infty} \frac{dz}{R(z)},$$

qui est finie et réelle, le produit $(1-z^2)(1-k^2z^2)$ étant positif pour $z > \frac{1}{k}$, et dont nous désignerons provisoirement la valeur par G.

Le long du quart de cercle, $R(z)$ sera de la forme

$$\begin{aligned}\sqrt{(1-\mathfrak{r}^2 e^{2ip})(1-k^2\mathfrak{r}^2 e^{2ip})} &= \mathfrak{r}^2 e^{2ip}\sqrt{(1-\mathfrak{r}^{-2}e^{-2ip})(k^2-\mathfrak{r}^{-2}e^{-2ip})} \\ &= k\mathfrak{r}^2 e^{2ip}(1+\delta),\end{aligned}$$

δ étant infiniment petit pour $\mathfrak{r}$ infiniment grand; par suite,

$$\int \frac{dz}{R(z)} = \frac{1}{k\mathfrak{r}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-ip} i\, dp}{1+\delta}$$

s'annule pour $\mathfrak{r} = \infty$. Donc l'intégrale arrivera au point $+i\mathfrak{r}$, sur

l'axe des y, avec la valeur

$$K + iK' + G.$$

L'expression précédente du radical, $kr^2 e^{2ip}(1+\delta)$, montre que, lorsque p croît de $\frac{\pi}{2}$, le radical est multiplié par $e^{i\pi} = -1$, et par suite il change de signe. Comme il part de O suivant l'axe des y avec le signe $+$ et qu'il est réel le long de cet axe, il devra être négatif pour $z =$ l'infini réel; donc G est négatif.

De ir à O, l'intégrale croîtra de la quantité

$$\int_{+ir}^{0} \frac{dz}{R(z)} = -i\int_0^{\infty} \frac{i\,dy}{\sqrt{(1+y^2)(1+k^2y^2)}},$$

dont la valeur sera de la forme $-iH$, H étant réel et positif.

Donc l'intégrale prise le long du contour fermé tout entier sera

$$K + iK' + G - iH,$$

et, cette intégrale devant être nulle, on en conclura les valeurs de G et de H, savoir [1]

$$G = \int_{\frac{1}{k}}^{\infty} \frac{dz}{R(z)} = -K,$$

$$H = \int_0^{\infty} \frac{dy}{R(iy)} = \int_0^{\infty} \frac{dy}{\sqrt{(1+y^2)(1+k^2y^2)}} = K'.$$

1265. Désignons, pour abréger, par

$$z_1 = 2K, \quad z_2 = 2K + 2iK'$$

les intégrales correspondantes aux contours élémentaires $(+1)$ et $\left(+\frac{1}{k}\right)$, ce dernier ayant été choisi, comme nous l'avons dit, de manière à passer *au-dessus* de $+1$; les intégrales relatives aux contours (-1) et $\left(-\frac{1}{k}\right)$, symétriques des premiers par rapport

---

[1] On obtiendrait directement les valeurs de ces deux intégrales en posant, dans G, $z = \frac{1}{kz'}$, et dans H, $y = \frac{x^2}{1-x^2}$.

à O, seront $-\varkappa_1$ et $-\varkappa_2$, la fonction $R(z)$ étant supposée, pour chacune de ces intégrales, partir de O avec la valeur $+1$.

En désignant toujours par

$$u = \int_0^z \frac{dz}{R(z)}$$

l'intégrale rectiligne allant au point z, l'intégrale prise le long d'un chemin entourant une seule fois le point $+1$ sera égale [1255] à

$$\varkappa_1 - u.$$

Si l'on fait deux fois le tour de $(+1)$, l'intégrale sera

$$\varkappa_1 - (\varkappa_1 - u) = u.$$

En général, si l'on fait m fois de suite le tour de $(+1)$, l'intégrale sera

$$\frac{1}{2}\varkappa_1 - (-1)^m \left(\frac{1}{2}\varkappa_1 - u\right).$$

Si l'on fait une fois le tour de $(+1)$, puis une fois le tour de (-1), l'intégrale deviendra

$$2\varkappa_1 + u.$$

Si l'on répète m fois le parcours alternatif des deux contours élémentaires, l'intégrale sera

$$+2m\varkappa_1 + u \quad \text{ou} \quad -2m\varkappa_1 + u,$$

suivant que l'on aura commencé par $(+1)$ ou par (-1).

Si l'on parcourt alternativement les deux contours, de manière à décrire $m+1$ fois le premier et m fois le second, l'intégrale sera, suivant que l'on aura commencé par $(+1)$ ou par (-1),

$$\pm(2m+1)\varkappa_1 - u.$$

On aura des résultats analogues pour les contours $\left(\pm\frac{1}{k}\right)$.

On voit par là que, si l'on parcourt les quatre contours chacun un nombre de fois suffisant et dans un ordre convenable, on obtiendra pour l'intégrale résultante une valeur de la forme

$$m\varkappa_1 + n\varkappa_2 + (-1)^{m+n} u,$$

ou, en mettant pour $\varkappa_1$ et $\varkappa_2$ leurs valeurs,

$$(1) \qquad 2(m+n)\mathrm{K} + 2ni\mathrm{K}' + (-1)^{m+n}u,$$

m et n étant des entiers quelconques, positifs ou négatifs.

En particulier, l'intégrale rectiligne u conservera son signe si le nombre $m+n$ est pair. Si on le représente par 2μ, l'expression générale (1) deviendra

$$(2) \qquad 4\mu\mathrm{K} + 2ni\mathrm{K}' + u.$$

Donc, si l'on arrive au point z après avoir parcouru une ligne entourant *alternativement* $2\mu - n$ fois chacun des deux points $+1$ et -1, puis n fois chacun des deux points $+\frac{1}{k}$ et $-\frac{1}{k}$, l'intégrale obtenue sera égale à l'intégrale rectiligne augmentée de

$$4\mu\mathrm{K} + 2ni\mathrm{K}',$$

$2\mu - n$ et n étant des nombres positifs ou négatifs, suivant que les parcours commencent par les chemins $(+1)$ ou (-1), $\left(+\frac{1}{k}\right)$ ou $\left(-\frac{1}{k}\right)$.

Donc à un même point z correspondent des valeurs en nombre infini de l'intégrale $\int \frac{dz}{\mathrm{R}(z)}$, différant entre elles par des multiples quelconques de $4\mathrm{K}$ et de $2i\mathrm{K}'$. Ces deux quantités constantes sont dites les périodes de l'intégrale $\int \frac{dz}{\mathrm{R}(z)}$, et cette intégrale est dite *doublement périodique*.

1266. On peut donner de cette double périodicité une représentation géométrique très-simple.

Supposons le plan partagé en bandes verticales de largeur $4\mathrm{K}$ par des parallèles à $\mathrm{O}y$ tracées symétriquement de part et d'autre de cet axe, et en même temps partagé en bandes horizontales de largeur $2\mathrm{K}'$ par des parallèles à $\mathrm{O}x$ tracées symétriquement de part et d'autre de cet axe. De cette manière, le plan sera divisé en rectangles égaux, dont l'un aura pour centre l'origine, et dont les dimensions seront $4\mathrm{K}$ et $2\mathrm{K}'$.

La formule (2) du numéro précédent nous montre qu'à une même valeur de z correspondent une infinité de valeurs de u différant entre elles de multiples quelconques de $4K$, et situées par conséquent sur une même parallèle à Ox, de manière qu'il s'en trouve une, et une seule, dans chacune des bandes verticales.

Elle nous montre aussi qu'à une même valeur de z correspondent une infinité de valeurs de u différant entre elles de multiples quelconques de $2iK'$, et par conséquent rangées à la distance $2K'$ les unes des autres sur une même parallèle à Oy, de manière qu'il s'en trouve une, et une seule, dans chacune des bandes horizontales.

Donc dans chaque rectangle de base $4K$ et de hauteur $2K'$ se trouve une des valeurs de u données par la formule (2), et une seule.

Si l'on suppose maintenant, dans la formule (1), que $m+n$ soit impair et égal à $2\mu+1$, à la même valeur de z correspondront toutes les valeurs de l'intégrale données par la formule

$$(3) \qquad 4\mu K + 2niK' + 2K - u,$$

et l'on verra de même que dans chacun des rectangles précédents se trouvera une des valeurs de l'intégrale données par la formule (3), et une seule.

Donc dans chacun des rectangles en question se trouvent deux valeurs de u correspondantes à une valeur de z quelconque, et comprises dans la formule (1). Nous verrons plus tard que ce sont les seules.

Il est aisé de reconnaître que les deux valeurs de u contenues dans chaque rectangle sont situées symétriquement par rapport au centre du rectangle, la position de ce centre étant déterminée par l'expression $(4\mu+2)K+(2n+1)iK'$.

Remarquons que l'on arriverait à la même représentation en supposant que l'origine O, au lieu d'occuper le centre d'un rectangle, en occupe un des sommets. Dans ce cas, les valeurs représentées par les formules (2) et (3) seraient respectivement symétriques, non plus par rapport aux centres des rectangles, mais par rapport à leurs sommets.

§ IV.

DES FONCTIONS INVERSES DES INTÉGRALES MULTIFORMES.

1267. En considérant, dans les deux paragraphes précédents, les intégrales dont les différentielles ont des points critiques situés à une distance finie de l'origine, nous avons vu que la valeur de ces intégrales ne dépend pas seulement de la limite supérieure z de l'intégration, mais encore du chemin parcouru pour arriver à cette limite. Nous avons vu, de plus, que les différentes déterminations de l'intégrale qui correspondent à la même limite z sont égales à la *valeur rectiligne* combinée par addition ou soustraction avec des multiples quelconques des intégrales prises le long des divers contours élémentaires qui entourent les points critiques de la différentielle, intégrales que nous avons appelées les *périodes* de l'intégrale proposée.

Il s'agit actuellement d'étudier les propriétés de la limite supérieure z, considérée à son tour comme fonction de l'intégrale u. Dans les exemples qui nous ont déjà occupés, nous verrons que cette fonction $z = \psi(u)$ est non-seulement une fonction *périodique* de u, c'est-à-dire une fonction reprenant la même valeur lorsqu'on augmente son argument u de multiples quelconques des diverses périodes de l'intégrale $u = \int_{z_0}^{z} f(z)\,dz$, mais qu'elle sera, en outre, une fonction *monogène et uniforme* de u lorsqu'on fera varier u dans toute l'étendue du plan.

La monogénéité de la fonction $z = \psi(u)$ résulte immédiatement de ce qu'elle a une dérivée déterminée, $\frac{dz}{du} = \frac{1}{f(z)}$, pour toute valeur de z, et par suite pour toute valeur possible de u.

Il suffira, pour établir son uniformité, de constater que les diverses valeurs de la fonction directe u, correspondantes à toutes les valeurs de z, remplissent toute l'étendue du plan et la remplissent une seule fois, sans laisser de vides et sans que des valeurs correspondantes à des valeurs de z différentes puissent se superposer.

Enfin, nous n'aurons besoin de faire cet examen que pour les

seules valeurs de u correspondantes aux divers chemins rectilignes de z, et de montrer que ces valeurs remplissent *complétement et une seule fois* une certaine étendue du plan, laquelle se répétera indéfiniment et sans superposition ni lacunes, de manière à couvrir toute l'étendue du plan, lorsqu'on augmentera toutes les valeurs de u qu'elle contient de multiples quelconques des périodes de cette intégrale.

1268. Soit une fonction $f(z)$ admettant pour période la constante A, c'est-à-dire telle que l'on ait, quel que soit le nombre entier m,

$$f(z+m\mathrm{A})=f(z). \tag{1}$$

Si l'on partage le plan en bandes par des droites parallèles, représentées par l'équation

$$z=\mathrm{H}+m\mathrm{A},$$

où l'entier m prend toutes les valeurs possibles, alors à chaque système de valeurs de $f(z)$ relatif à un ensemble de points situé dans une quelconque de ces bandes correspondra dans chacune des autres bandes un système identique de valeurs relatif à un second ensemble de points superposable au premier.

On pourra toujours supposer que la relation (1) n'ait lieu que pour des valeurs entières de m; car, si elle était vérifiée, quel que fût l'entier m, par des valeurs de la forme $z+\frac{m}{\mu}\mathrm{A}$, on remplacerait la période A par $\mathrm{A}'=\frac{\mathrm{A}}{\mu}$, et la relation reprendrait alors la forme (1).

Une fonction est *doublement périodique* lorsqu'il existe deux constantes A, B telles que l'on ait, quels que soient les entiers m, n, la relation

$$f(z+m\mathrm{A}+n\mathrm{B})=f(z). \tag{2}$$

On voit, comme tout à l'heure, que, si l'on mène toutes les droites représentées par l'équation

$$z=\mathrm{H}+m\mathrm{A}+n\mathrm{B},$$

ces droites partageront le plan tout entier en parallélogrammes

ayant leurs côtés égaux en grandeur et en direction aux droites qui représentent les périodes A, B, et dans chacun desquels les mêmes séries de valeurs de $f(z)$ se reproduisent avec une disposition identique.

Nous donnerons, pour abréger, à ces bandes ou à ces parallélogrammes, relatifs à la périodicité simple ou double, le nom d'*aires élémentaires*.

1269. Une fonction simplement ou doublement périodique, qui est uniforme et continue dans chaque aire élémentaire, admet au moins un infini dans l'intérieur de cette aire; car, si elle restait finie dans toute cette aire, elle le serait aussi dans tout le plan, jusqu'à l'infini inclusivement. Donc [1137] cette fonction se réduirait alors à une constante.

La fonction $f(z)$ étant uniforme et continue, sa valeur réciproque $\frac{1}{f(z)}$ le sera aussi, et, par suite, devra admettre aussi un infini. Donc la fonction $f(z)$ devra admettre au moins un zéro dans chaque aire élémentaire.

Donc, *si une fonction simplement ou doublement périodique, uniforme et continue, ne devient ni nulle ni infinie dans une aire élémentaire quelconque, cette fonction se réduira à une constante.*

1270. I. Commençons par l'étude de la fonction inverse de l'intégrale

$$u = \int_1^z \frac{dz}{z},$$

et considérons d'abord les valeurs de u correspondantes à toutes les valeurs réelles de z.

Nous avons vu [1256] que le point critique $z = 0$ de la différentielle est un point de ramification de l'intégrale u, et que la période de cette intégrale est l'intégrale prise le long du contour élémentaire partant du point initial $+1$ et entourant $z = 0$, intégrale dont la valeur est $2i\pi$.

Si l'on fait varier z sur l'axe des *x positifs* depuis une valeur infiniment petite jusqu'à une valeur infiniment grande, il est aisé de voir que l'intégrale rectiligne u prendra toutes les valeurs réelles

depuis $-\infty$ à $+\infty$. En effet, si l'on fait varier z en progression géométrique, u variera en progression arithmétique ; car il résulte du théorème d'addition démontré au n° 827 que l'on a, en posant $u = \mathrm{F}(z)$,

$$\mathrm{F}(z^n) = \int_1^{z^n} \frac{dz}{z} = \int_1^z + \int_z^{z^2} + \cdots + \int_{z^{n-1}}^{z^n}$$

$$= \mathrm{F}(z) + \mathrm{F}\left(\frac{z^2}{z}\right) + \cdots + \mathrm{F}\left(\frac{z^n}{z^{n-1}}\right) = n\mathrm{F}(z).$$

Or $\mathrm{F}(z)$ est positif ou négatif, suivant que z est $>$ ou <1 ; donc, si n croît jusqu'à l'infini, z^n variera de 1 à $+\infty$ ou de 1 à 0, tandis que $\mathrm{F}(z^n)$ variera de 0 à $\pm\infty$, et réciproquement.

La fonction $u = \mathrm{F}(z)$ croîtra donc toujours d'une manière continue, et remplira *complétement et une seule fois* l'axe des abscisses réelles dans le plan des u, lorsque z variera de 0 à $+\infty$. Donc, réciproquement, $z = \psi(u)$ sera une fonction uniforme et continue de u pour toutes les valeurs de cette variable de $-\infty$ à $+\infty$. Autrement dit, tandis que le point u décrira d'une manière continue l'axe $\mathrm{O}x$ de $-\infty$ à $+\infty$, $z = \psi(u)$ décrira d'une manière continue l'axe des x *positifs*.

1271. Faisons maintenant décrire à z le chemin rectiligne partant de $+1$ et comprenant l'axe des x négatifs. Ce chemin passant par le point critique $z = 0$, nous éviterons ce point au moyen d'un demi-cercle décrit du centre O et situé, par exemple, *au-dessus* de $\mathrm{O}x$. En posant

$$z = re^{ip},$$

l'intégrale $\int_1^z \frac{dz}{z}$, pour z négatif et $= -z'$, se composera d'abord de l'intégrale

$$\int_1^r \frac{dz}{z} = \mathrm{F}(r),$$

puis de l'intégrale semi-circulaire

$$\int_0^\pi \frac{re^{ip}\, i\, dp}{re^{ip}} = i\pi,$$

et enfin de l'intégrale

$$\int_{-r}^{-z'} \frac{dz}{z} = \int_{r}^{z'} \frac{dz}{z} = \mathrm{F}(z') - \mathrm{F}(r).$$

En réunissant ces trois parties, on trouve, pour la valeur rectiligne de l'intégrale correspondante à la valeur réelle et négative $z = -z'$,

$$u = \mathrm{F}(-z') = \int_{1}^{-z'} \frac{dz}{z} = \mathrm{F}(z') + i\pi \quad \text{[1]}.$$

Ainsi, à toutes les valeurs complexes de u comprises dans la formule $i\pi + u_0$, u_0 variant de $-\infty$ à $+\infty$, correspondent toutes les valeurs réelles et négatives de $z = \psi(u)$, depuis o jusqu'à $-\infty$. En d'autres termes, le point z décrira l'axe des x *négatifs*, tandis que u décrira, de $-\infty$ à $+\infty$, une parallèle à Ox, située à la distance $+\pi$ de cet axe.

1272. Faisons maintenant décrire à z une droite $z = 1 + re^{ip}$, partant du point initial $z = +1$ de l'intégrale, et faisant avec Ox l'angle constant p. On aura alors, pour l'intégrale prise suivant cette droite,

$$u = \int_{1}^{z} \frac{dz}{z} = \int_{0}^{r} \frac{e^{ip}\,dr}{1 + re^{ip}}.$$

Cherchons la forme de la courbe décrite par cette intégrale, lorsque r varie de o à ∞.

La tangente à la courbe u fait avec Ox un angle égal à l'argument de la différentielle

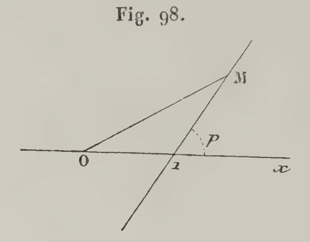
$$du = \frac{e^{ip}}{1 + re^{ip}}\,dr.$$

Cet argument est égal à l'argument p du numérateur, moins l'argument du dénominateur $1 + re^{ip}$. Ce dénominateur est représenté par la droite $\mathrm{OM} = \overline{\mathrm{O}1} + \overline{1\mathrm{M}}$ (*fig.* 98), et son argument par l'angle $1\mathrm{OM}$; et il est facile de voir que, tandis que M se déplace depuis le point 1 jusqu'à l'infini sur la droite donnée, OM passe de la direc-

[1] On aurait trouvé $\mathrm{F}(z') = -i\pi$ si l'on avait tracé le demi-cercle au-dessous de Ox.

tion Ox à une direction parallèle à $\overline{1M}$. Donc l'argument de du

Fig. 98.



varie depuis $p - 0$ ou p jusqu'à $p - p$ ou zéro, et par suite la tangente à la courbe u est, au départ, parallèle à $\overline{1M}$, et, quand le point s'éloigne à l'infini, elle tend à devenir parallèle à Ox.

Dans l'intervalle entre $r = 0$ et $r = +\infty$, l'angle xOM croissant constamment, $p - xOM$ diminue, d'où il résulte que la direction de la tangente à la courbe u va en se rapprochant de la direction Ox et que la courbe tourne constamment sa concavité vers l'axe Ox.

Si l'on considère le prolongement de la droite correspondant aux valeurs négatives de r, l'angle $1OM$ prendra des valeurs négatives en variant de 0 à $p - \pi$. L'argument du numérateur étant $p - \pi$, puisque r est négatif, l'argument de du variera donc depuis p jusqu'à zéro, et l'on voit que la tangente à la branche correspondante de la courbe u tend à devenir parallèle à l'axe des x positifs.

Remarquons maintenant que, si l'on substitue au chemin rectiligne $\overline{1z}$ le chemin formé par la portion $\overline{1x} = r$ prise sur l'axe des x et par l'arc de cercle $\overline{xz}$, décrit du centre 1 avec le rayon r entre l'axe Ox et la droite $\overline{1z}$, l'intervalle entre les deux chemins ne contenant aucun point critique, l'intégrale ne changera pas de valeur. On aura donc

$$u = \int (1M) = \int (1x) + \int (\text{arc}\, xM)$$
$$= \int_0^r \frac{dr}{1+r} + \int_0^p \frac{re^{ip}.\, i\, dp}{1+re^{ip}}.$$

(¹) Au lieu de considérer r comme variant négativement, on aurait pu remarquer que, l'intégrale u ne changeant pas quand on change r en $-r$ et p en $\pi - p$, tout se passe symétriquement de part et d'autre de Ox, de sorte que l'on peut se contenter d'étudier ce qui se passe *au-dessus* de cet axe.

La première de ces deux intégrales est réelle et varie, pour r positif, de o à $+\infty$. La seconde intégrale, qui peut s'écrire sous la forme

$$i\int_0^p \frac{dp}{1+r^{-1}e^{-ip}},$$

a, pour r infini, la valeur ip. De là il est facile de conclure que la distance du point u à l'axe réel a pour limite la valeur p. Donc la courbe u a une asymptote parallèle à Ox, à la distance $+p$ de cet axe. On verrait de même qu'elle a une seconde asymptote aussi parallèle à Ox et située *au-dessous* de Ox, à la distance $-(\pi-p)$. La courbe u est donc comprise tout entière entre deux parallèles à Ox, à la distance π l'une de l'autre.

Lorsque p varie depuis o jusqu'à π, l'asymptote supérieure variera depuis l'axe des x jusqu'à la distance π *au-dessus* de cet axe, et l'asymptote inférieure depuis la distance $-\pi$ *au-dessous* de Ox jusqu'à l'axe Ox lui-même. Donc toutes les courbes u seront comprises dans une bande de largeur 2π, dont la ligne médiane est Ox.

Si l'on suppose maintenant la limite supérieure $r=1$, l'intégrale u deviendra

$$\int_0^1 \frac{dr}{1+r}+\int_0^p \frac{e^{ip}.i\,dp}{1+e^{ip}},$$

que l'on trouve aisément égale à

$$\log(1+\cos p)+\frac{ip}{2}.$$

Si l'angle p est obtus, la partie réelle devient négative; si p tend vers la valeur π, la partie réelle tend vers $-\infty$, la partie imaginaire restant finie. Donc, pour p infiniment voisin de π, la courbe sera toujours comprise entre l'axe Ox et la droite qui joint l'origine avec le point $-\infty+\frac{i\pi}{2}$, de sorte que, pour une abscisse négative finie, sa branche inférieure tend à se confondre avec l'axe des x négatifs. A partir de l'abscisse négative maximum, la courbe revient dans le sens des x croissants et s'approche indéfiniment de son asymptote. Pour p aigu, on a un système de courbes disposé symétriquement au précédent par rapport à l'axe des x.

1273. Si l'on fait varier p d'une manière continue, il est aisé de voir que les courbes u varieront d'une manière continue et ne se couperont pas.

En effet, si nous donnons à p un accroissement infiniment petit et positif δp, le z, pour la même valeur de r, prendra un accroissement δz de direction perpendiculaire à la droite $\overline{1z}$, et l'intégrale $\int \frac{dz}{z}$ croîtra de $\delta u = \frac{\delta z}{z}$, dont l'argument est égal à celui de du augmenté de $\frac{\pi}{2}$, et dont le module a une valeur infiniment petite et différente de zéro en même temps que la valeur de δp. Donc la distance des deux courbes u et $u + \delta u$ est infiniment petite avec δp, et, comme elle est comptée sur une perpendiculaire à ces courbes dirigée du côté de la convexité de la courbe u, les deux courbes ne peuvent se rencontrer.

Il résulte de là que l'ensemble des courbes u remplit *complétement et une seule fois* toute la portion de plan comprise dans la bande de largeur 2π qui s'étend symétriquement de part et d'autre de l'axe Ox.

Donc, dans l'intérieur de cette bande, il passe, par un point donné quelconque u, une courbe u et une seule, et, par suite, à toute valeur de u correspond un chemin rectiligne déterminé de la variable z et un point déterminé sur ce chemin. Donc enfin, dans cette bande, la variable z est une fonction monogène, uniforme et continue de la variable u.

En ayant égard à ce que nous avons dit dans le paragraphe précédent sur la périodicité de l'intégrale $\int \frac{dz}{z}$, les mêmes valeurs de cette intégrale se reproduisant d'une manière identique dans chacune des bandes de largeur 2π dans lesquelles le plan peut être divisé, on en conclura que la fonction z de la variable u est synectique dans toute l'étendue du plan et, de plus, qu'elle est une fonction périodique dont la période est $2i\pi$, c'est-à-dire que l'on a, quel que soit l'entier n,

$$z = \psi(u) = \psi(u + 2ni\pi)$$

ou, comme on l'écrit habituellement,

$$z = e^u = e^{u+2ni\pi}.$$

1274. II. Considérons la fonction inverse de l'intégrale

$$u = \int_0^z \frac{dz}{1 + z^2}.$$

Cette intégrale a, comme nous l'avons vu, deux points critiques, $+i$ et $-i$, à chacun desquels correspond la période $\pm \pi$. Si donc on partage le plan en bandes parallèles à l'axe des y et de largeur égale à π, les valeurs de l'intégrale correspondantes à toutes les valeurs de z se reproduiront identiquement de la même manière dans chacune de ces bandes. Il suffit donc d'étudier la relation entre z et u pour une seule bande, celle, par exemple, qui contient les valeurs de u correspondantes à tous les chemins rectilignes partant de la limite inférieure zéro de l'intégrale.

Considérons d'abord les chemins rectilignes qui coïncident avec les axes coordonnés. Si z varie, sur l'axe Ox, de $-\infty$ à $+\infty$, l'intégrale u variera de $-\infty$ à une certaine valeur A, que nous déterminerons tout à l'heure, prendra toutes les valeurs comprises entre $-$A et A, et remplira ainsi toute la partie de l'axe Ox comprise dans la bande de largeur 2A dont l'origine occupe le centre.

Si maintenant on fait, comme dans l'exemple précédent, parcourir à z un quart de cercle, de centre O et de rayon infiniment grand r, allant de l'axe Ox à l'axe Oy, l'intégrale croîtra de

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{re^{ip}\, i\, dp}{1 + r^2 e^{2ip}} = \frac{1}{r} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-ip}\, i\, dp}{1 + r^{-2} e^{-2ip}},$$

expression qui est égale à l'infiniment petit $\frac{1}{r}$, multiplié par une intégrale ayant pour limite $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-ip}\, i\, dp = -e^{-\frac{i\pi}{2}} = i$, et qui, par suite, a pour limite zéro. Donc, quand z arrive au point $+i\infty$, l'intégrale u a conservé la valeur $\frac{\pi}{2}$.

Passons de $z = +i\infty$ à $z = 0$ suivant l'axe des y, et en évitant seulement le point critique $+i$ au moyen d'un demi-cercle tracé du centre $+i$ avec le rayon infiniment petit ρ. L'intégrale prise

de $+i\infty$ à o se décomposera en trois intégrales

$$\int_{+i\infty}^{i+i\rho} \frac{dz}{1+z^2} = i\int_{\infty}^{1+\rho} \frac{dy}{1-y^2},$$

$$\int_{+\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \frac{\rho e^{ip}.i\,dp}{1+(i+\rho e^{ip})^2} = \frac{1}{2}\int_{+\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \frac{dp}{1-i\rho e^{ip}},$$

$$\int_{i-i\rho}^{0} \frac{dz}{1+z^2} = i\int_{i-\rho}^{0} \frac{dy}{1-y^2}.$$

La seconde de ces intégrales a pour valeur limite $-\frac{\pi}{2}$.

Si, dans la première, on change y en $\frac{1}{y}$, l'intégrale devient

$$\int_0^{\frac{1}{1+\rho}} \frac{-\frac{dy}{y^2}}{1-\frac{1}{y^2}} = \int_0^{\frac{1}{1+\rho}} \frac{dy}{1-y^2},$$

et, en l'ajoutant à la troisième, il vient

$$\int_{1-\rho}^{\frac{1}{1+\rho}} \frac{dy}{1-y^2} = \int_{1-\rho}^{\frac{1}{1+\rho}} \frac{1-y}{1-y^2}\,\frac{dy}{1-y}$$

$$= \text{moy}\,\frac{1}{1+y} \times \int_{1-\rho}^{\frac{1}{1+\rho}} \frac{dy}{1-y}$$

$$= \text{moy}\,\frac{1}{1+y} \times \log\frac{1}{1+\rho},$$

dont la limite est zéro.

Donc on aura, à un infiniment petit près, en égalant à zéro l'intégrale prise suivant le contour parcouru,

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} - \frac{\pi}{2} = 0,$$

ce qui donne la valeur de l'intégrale prise le long de la totalité de l'axe des x positifs.

L'intégrale

$$\int_{1-\rho}^{0} \frac{dy}{1-y^2} = \text{moy}\, \frac{1}{1+y} \times \log \rho$$

est infiniment grande pour ρ infiniment petit.

L'intégrale u, étant une fonction impaire de z, repassera par les mêmes valeurs, au signe près, le long d'un contour symétrique du précédent, c'est-à-dire composé de l'axe des x négatifs, d'un quart de cercle joignant les points $-\infty$ et $-i\infty$, et de l'axe des y négatifs, où l'on aura évité le point $-i$ par un demi-cercle tracé à gauche de cet axe.

Les contours correspondants aux deux autres quarts de cercle de rayon infini peuvent être remplacés par l'un des deux contours élémentaires $(+i)$, $(-i)$, suivi des mêmes contours où l'on aura évité les points critiques dans les sens contraires des précédents, c'est-à-dire de manière à laisser ces points en dehors des contours. On aura ainsi, sur le contour correspondant au deuxième quadrant, l'intégrale relative au contour élémentaire $(+i)$, qui est égale à $+\pi$, plus la somme

$$\int_0^{-\infty} \frac{dz}{1+z^2} + \int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d.re^{ip}}{1+r^2e^{2ip}} + \int_{+i\infty}^{i+i\rho} \frac{dz}{1+z^2}$$

$$+ \int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d.\rho e^{ip}}{1+(i+\rho e^{ip})^2} + \int_{i-i\rho}^{0} \frac{dz}{1+z^2},$$

où r est infiniment grand et ρ infiniment petit, et dont la valeur sera encore nulle.

On voit déjà que, si l'on donne à z toutes les valeurs réelles de $-\infty$ à $+\infty$, u prendra, et une seule fois, toutes les valeurs réelles de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$. Si l'on donne à z toutes les valeurs imaginaires pures positives, z variant de o à $+i-i\rho$, l'intégrale u varie de o à $+i\infty$; z contournant le point $+i$ en passant à droite, u varie de $+i\infty$ à $+\frac{\pi}{2}-i\infty$, et enfin, z variant de $+i+i\rho$ à $+i\infty$, u varie de $+\frac{\pi}{2}-i\infty$ à $+\frac{\pi}{2}$.

Si, au contraire, z parcourt l'axe des y négatifs, en passant à gauche de $-i$, l'intégrale prendra des valeurs respectivement égales et de signes contraires aux précédentes.

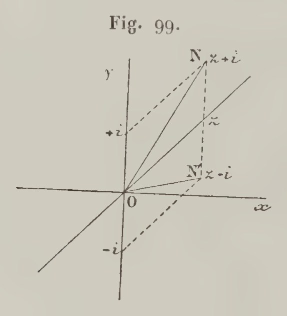
1275. Discutons maintenant l'intégrale prise suivant le chemin rectiligne $z = re^{ip}$,

$$u = \int_0^z \frac{dz}{1+z^2} = \int_0^r \frac{e^{ip}\,dr}{1+r^2 e^{2ip}},$$

l'angle p étant d'abord supposé aigu.

L'argument de la différentielle du est égal à l'argument p de dz, moins l'argument du dénominateur $1+z^2=(z+i)(z-i)=\mathrm{ON}.\mathrm{ON}'$ (*fig.* 99), lequel est égal à la somme des angles $x\mathrm{ON}$, $x\mathrm{ON}'$. Cette

Fig. 99.



somme est nulle pour $z=0$, et par suite, au départ, la courbe u est tangente à $\overline{\mathrm{O}z}$. Pour z croissant, chacun des deux angles s'ap proche indéfiniment de p, et, pour $z=\infty$, l'argument de u a pour limite $p-2p=-p$. D'ailleurs, en remplaçant le chemin $\mathrm{O}z$ par un chemin rectiligne égal pris sur $\mathrm{O}x$ et par un arc de cercle joignant les deux extrémités, on verrait, comme au numéro précédent, que l'intégrale circulaire est nulle pour $r=\infty$. Donc, quel que soit $p<\frac{\pi}{2}$, l'intégrale rectiligne aura toujours, pour

$$r=\infty,$$

la valeur $+\frac{\pi}{2}$. Donc la courbe u, aux points qui correspondent à $r=0$ et à $r=\infty$, est tangente aux deux côtés d'un triangle isoscèle ayant sa base, de longueur $\frac{\pi}{2}$, située sur $\mathrm{O}x$.

De plus, l'argument du dénominateur $1+z^2$ a pour tangente

$$\frac{\operatorname{tang} 2p}{1+\frac{1}{r^2\cos 2p}},$$

et la valeur de cette tangente augmente continuellement avec r. Donc la courbe u est constamment concave vers l'axe des x.

Pour $r=1$, l'intégrale, dont nous avons donné la valeur générale au n° 373, a pour valeur

$$\frac{\pi}{4}+\frac{i}{4}\log\frac{1+\sin p}{1-\sin p}.$$

La partie imaginaire de cette valeur devient infiniment grande pour p infiniment voisin de $\frac{\pi}{2}$, d'où l'on conclut que la courbe u s'approche indéfiniment de ses tangentes et s'éloigne à l'infini de l'axe des x.

On verrait, comme au n° 1273, que les courbes u ne se rencontrent pas et qu'elles varient d'une manière continue en même temps que p. Donc elles passent par tous les états intermédiaires, depuis la base commune des triangles isoscèles, qui correspond à $p=0$, jusqu'à une courbe s'élevant à l'infini et se confondant, à distance finie, avec l'axe des y et une parallèle à cet axe menée à la distance $\frac{\pi}{2}$. Donc les courbes u correspondantes aux chemins rectilignes compris dans le premier quadrant remplissent *complètement et une seule fois* la portion de la bande de largeur π comprise dans ce quadrant.

On trouverait de la même manière que les courbes u correspondantes aux chemins rectilignes compris dans les trois autres quadrants remplissent aussi *complètement et une seule fois* les trois autres parties de la bande en question. On le reconnaît immédiatement par la symétrie des valeurs obtenues.

Donc z est une fonction de u synectique dans toute l'étendue du plan. De plus, cette fonction est périodique, et sa période est égale à π. En désignant cette fonction par $\operatorname{tang} u$, par analogie avec le cas de u réel, on aura, quel que soit l'entier k,

$$\operatorname{tang} u = \operatorname{tang}(u+k\pi).$$

En combinant les résultats précédents avec le théorème d'addition [827, II], on en déduirait aisément toutes les propriétés de la fonction $\tang z$.

1276. III. Nous avons vu [1261] que l'intégrale

$$u = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$$

a pour période 2π et que dans chaque bande verticale de largeur 2π se trouvent deux valeurs de cette intégrale, correspondantes à la même valeur de z. Étudions la marche de l'intégrale suivant les divers chemins rectilignes de z partant de l'origine, et examinons d'abord les valeurs qu'elle prend lorsque z parcourt les axes coordonnés.

Si z parcourt l'axe des x, en supposant que le radical $\sqrt{1-z^2}$ parte de l'origine avec la valeur $+1$ et que z évite le point de ramification $+1$ en passant *au-dessus*, on aura d'abord l'intégrale

$$\int_0^{1-\rho} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}},$$

qui, pour ρ infiniment petit, tendra vers une certaine limite réelle, que nous désignerons provisoirement par A.

Posons maintenant $z = 1 + \rho e^{ip}$, d'où

$$\sqrt{1-z} = \sqrt{-\rho e^{ip}} = \sqrt{\rho e^{i(p+\pi)}} = \pm\sqrt{\rho}\, e^{i\frac{p+\pi}{2}};$$

pour $p = \pi$, le radical doit avoir la valeur positive $\sqrt{1-\rho}$, ce qui exige que l'on prenne l'expression précédente avec le signe —. On devra donc poser

$$\sqrt{1-z} = -\sqrt{\rho}\, e^{i\frac{p+\pi}{2}} = -i\sqrt{\rho}\, e^{\frac{1}{2}ip}.$$

D'après cela, l'intégrale le long du demi-cercle supérieur aura pour valeur

$$\int_\pi^0 \frac{d.\rho e^{ip}}{-i\sqrt{\rho}.e^{\frac{1}{2}ip}\sqrt{2+\rho e^{ip}}} = -\sqrt{\rho}\int_\pi^0 \frac{e^{\frac{1}{2}ip}\,dp}{\sqrt{2+\rho e^{ip}}},$$

quantité infiniment petite en même temps que ρ, et dont la valeur, à une fraction près infiniment petite d'elle-même, sera $(1+i)\sqrt{2\rho}$.

Après avoir parcouru le demi-cercle supérieur, z revenant sur l'axe des x avec la valeur $1+\rho$, $\sqrt{1-z}$ prendra la valeur $-i\sqrt{\rho}$, et par suite le radical $\sqrt{1-z^2}$ aura une valeur imaginaire négative, de la forme $-ih^2$. Donc l'élément $\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$ de l'intégrale sera de la forme $+ih^2$, et par suite la partie de l'intégrale prise de $1+\rho$ à $+\infty$, $\int_{1+\rho}^{\infty}\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$, sera aussi de la forme $+ih^2$.

Décrivons maintenant, du centre O et d'un rayon infiniment grand r, un quart de cercle entre les axes Ox et Oy, et intégrons le long de ce quart de cercle. Si l'on pose $z=re^{ip}$, l'intégrale devient, en remarquant que le radical $\sqrt{1-z^2}$ doit être, pour $p=0$, de la forme $-ih^2$, ainsi que le quotient de sa division par re^{ip},

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{r\,d.e^{ip}}{\sqrt{1-r^2e^{2ip}}}=\frac{1}{-i}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dp}{\sqrt{r^{-2}e^{-2ip}-1}}=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dp}{\sqrt{1-r^{-2}e^{-2ip}}},$$

dont la limite est $-\frac{\pi}{2}$ pour $r=\infty$.

La variable z arrivera sur l'axe Oy avec la valeur $+ir$, et l'intégrale prise le long de l'axe des y,

$$\int_{ir}^{0}\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}=i\int_r^0\frac{dy}{\sqrt{1+y^2}},$$

sera une imaginaire pure, de la forme $\pm ih^2$. Sa valeur numérique, étant plus grande que celle de $\int\frac{dy}{y}=\log y$, sera infinie pour $r=\infty$.

En écrivant maintenant que l'intégrale prise le long du contour total est nulle, on aura, pour ρ infiniment petit et r infiniment grand,

$$0=\lim\int_0^{1-\rho}\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}+\lim\left(\int_{1+\rho}^{r}\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}+i\int_r^0\frac{dy}{\sqrt{1+y^2}}\right)-\frac{\pi}{2}.$$

En égalant séparément à zéro la partie réelle, on a

$$\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{\pi}{2}.$$

La seconde intégrale étant de la forme $+ih^2$, la dernière doit être de la forme $-ih^2$, et, comme $\int_r^0 \frac{dy}{+\sqrt{1+y^2}}$ est négatif, il faut que le radical $\sqrt{1+y^2}$ soit pris avec le signe $+$, ce qui résulterait d'ailleurs de ce qu'il doit revenir en O avec sa détermination initiale.

Ainsi aux valeurs réelles de z depuis zéro jusqu'à $+1$ correspondent des valeurs réelles de u depuis zéro jusqu'à $+\frac{\pi}{2}$. Lorsque z varie de $+1$ à $+\infty$, u prend des valeurs complexes de $\frac{\pi}{2}+i0$ à $\frac{\pi}{2}+i\infty$. Pour z purement imaginaire, de zéro à $+i\infty$, u passera par toutes les valeurs purement imaginaires, de zéro à $+i\infty$.

Si l'on change z en $-z$, l'intégrale u ne fera que changer de signe. Donc, si l'on fait parcourir à z des chemins symétriques des précédents par rapport à l'origine, u prendra des valeurs égales, au signe près, aux valeurs précédentes. Ainsi, z variant de zéro à -1, u variera de zéro à $-\pi$; z variant de -1 à $-\infty$, après avoir évité le point -1 en passant *au-dessous*, u variera de $-\frac{\pi}{2}$ à $-\frac{\pi}{2}-i\infty$; z variant de zéro à $-i\infty$, u variera de zéro à $-i\infty$.

1277. Supposons actuellement que z parcoure un chemin rectiligne $z=re^{ip}$. Pour avoir l'inclinaison de la tangente à la courbe u au point correspondant à z, remarquons que l'argument du radical $\sqrt{1-z^2}$ est la demi-somme des arguments des facteurs $1+z$, $1-z$ de la quantité sous le radical, c'est-à-dire l'inclinaison de la bissectrice de l'angle P'OP (*fig.* 100), OP et OP' représentant les facteurs en question. Cet argument sera nul pour $r=0$; il deviendra ensuite négatif si p est aigu, positif si p est obtus. Pour r infini, la bissectrice de P'OP se confondra avec une perpendiculaire à la droite Oz, et aura ainsi pour argument $p-\frac{\pi}{2}$. Donc

la différence entre p et l'argument du radical, c'est-à-dire l'argument de $\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$, variera depuis p jusqu'à $p - \left(p - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$; donc la tangente à la courbe u coïncidera d'abord avec le chemin recti-

Fig. 100.

ligne Oz, puis elle s'écartera de Oz, et, à l'infini, elle deviendra parallèle à Oy.

On voit ensuite, comme au n° 1273, que, si l'on fait croître l'angle p infiniment peu, la distance des deux courbes u correspondantes aux angles p et $p + \delta p$ sera infiniment petite, mais différente de zéro pour z fini, de sorte que les courbes u ne se rencontrent pas et se succèdent d'une manière continue.

Donc, si l'on considère tous les chemins rectilignes compris entre les directions Ox et Oy, on voit que les diverses courbes u correspondantes varieront par degrés continus, et toujours dans le même sens, depuis la courbe u correspondante à Ox [1], laquelle se compose d'un segment de l'axe réel égal à $\frac{\pi}{2}$, et de toute la perpendiculaire à l'extrémité de ce segment, jusqu'à la courbe u correspondante à Oy, laquelle est l'axe imaginaire lui-même. Donc toutes les courbes u remplissent *complètement et une seule fois* la bande verticale de largeur $\frac{\pi}{2}$ comprise à droite de Oy dans le premier quadrant.

La symétrie nous montre que la même chose se passe dans le

---

(1) En supposant qu'on ait évité le point $+1$ par un demi-cercle *supérieur*.

troisième quadrant, si l'on a évité le point -1 au moyen d'un demi-cercle *inférieur*, de sorte que les courbes u correspondantes aux chemins rectilignes compris dans ce quadrant remplissent entièrement et une seule fois la bande de largeur $\frac{\pi}{2}$ située dans ce même quadrant.

En faisant croître p de $\frac{\pi}{2}$ à π, on verrait de même que les courbes u correspondantes aux chemins rectilignes compris dans le deuxième et le quatrième quadrant remplissent, sans superposition, les portions de la bande verticale comprise entre $x = -\frac{\pi}{2}$ et $x = +\frac{\pi}{2}$ qui se trouvent dans ces quadrants respectifs.

Donc z est une fonction synectique de u dans toute l'étendue de la bande verticale en question.

1279. Si l'on avait commencé par décrire l'un ou l'autre des contours élémentaires $(+1)$, (-1), on aurait obtenu, en parcourant les divers chemins rectilignes, les valeurs précédentes de u changées de signe et augmentées toutes de $\pm\pi$. Dès lors, les valeurs réelles de l'intégrale s'étendront de $-\pi$ à $+\pi$ (¹). Donc, dans la bande verticale de largeur 2π, dont l'origine occupe le milieu, on aura, pour la même valeur de z, deux valeurs de l'intégrale, de la forme u et $\pm\pi - u$.

En parcourant maintenant l'ensemble des deux contours élémentaires un nombre quelconque de fois, on formera, comme nous l'avons vu, un nombre illimité de systèmes identiques de valeurs de u, correspondants à un même système de valeurs de z, et situés dans les bandes successives de largeur 2π, prises de part et d'autre de la première.

(¹) En effet, les parties réelles des valeurs de u obtenues dans le numéro précédent varient entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$. Les parties réelles de $+\pi - u$ varieront donc entre $+\frac{3\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, celles de $-\pi - u$ entre $-\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{3\pi}{2}$. On voit donc que la bande de largeur 2π, s'étendant symétriquement de part et d'autre de Oy, contiendra toujours l'une des deux valeurs $-\pi - u$ et $+\pi - u$, et une seule, puisque tout nombre compris entre $+\pi$ et $-\pi$ est contenu dans l'un des trois intervalles de $+\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{3\pi}{2}$, de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$ et de $-\frac{3\pi}{2}$ à $-\frac{\pi}{2}$, et y est contenu une seule fois.

1280. De ce que nous avons établi dans le paragraphe précédent il résulte que la variable z, considérée comme une fonction de l'intégrale u, est uniforme et continue dans toute l'étendue du plan, et qu'en outre elle est périodique, sa valeur ne changeant pas lorsqu'on remplace u soit par $2n\pi + u$, soit par $(2n+1)\pi - u$, de sorte que, si l'on désigne cette fonction par $\sin u$, on aura

$$\sin u = \sin(2n\pi + u) = \sin[(2n+1)\pi - u].$$

On a, de plus

$$\sin(-u) = -\sin u,$$

d'où l'on conclut la relation

$$\sin[(2n+1)\pi + u] = \sin(2n\pi - u) = -\sin u.$$

Donc, en général, on a

$$\sin(n\pi + u) = (-1)^n \sin u.$$

1281. Il est utile d'introduire aussi comme fonction analytique le radical $\sqrt{1 - z^2} = \sqrt{1 - \sin^2 u}$, que l'on désigne par la notation $\cos u$. La valeur numérique de ce radical se tire immédiatement de celle de $\sin u$; mais son signe ne peut être fixé d'après la valeur de u qu'au moyen d'une discussion spéciale.

Considérons d'abord les valeurs de u pour lesquelles on a

$$\sin u = +1.$$

L'intégrale $\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}}$ ayant pour valeur $\frac{\pi}{2}$, on aura par conséquent $\sin\frac{\pi}{2} = +1$, et, en vertu de la périodicité de la fonction $\sin u$, on aura, quel que soit l'entier n,

$$\sin\left[n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{2}\right] = 1.$$

Pour la valeur $\frac{\pi}{2}$ de u, le radical $\pm\sqrt{1 - z^2} = \cos u$ s'évanouit. Si on le suppose partant de $u = 0$ avec la valeur $+1$, quel devra être son signe dans le voisinage du point de ramification $\frac{\pi}{2}$?

Donnons à u une valeur $\frac{\pi}{2}+\varepsilon$, infiniment voisine de $\frac{\pi}{2}$; nous aurons, par les formules précédentes,

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\varepsilon\right)=\sin\left[\pi-\left(\frac{\pi}{2}+\varepsilon\right)\right]=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right).$$

Donc la fonction $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\varepsilon\right)$ est une fonction paire de ε, et, si on la développe en série suivant les puissances de ε, le développement ne pourra contenir que des puissances paires, et sera de la forme

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\varepsilon\right)=1+a\varepsilon^2+b\varepsilon^4+\ldots.$$

On tire de là

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\varepsilon\right)=\sqrt{1-(1+a\varepsilon^2+\ldots)^2}=\varepsilon\sqrt{-2a+b'\varepsilon^2+\ldots}.$$

Pour une valeur suffisamment petite du module de ε, $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\varepsilon\right)$ est donc sensiblement proportionnel à la première puissance de ε, et par conséquent le point $\frac{\pi}{2}$ n'est pas un point de ramification de cette fonction, non plus que les autres points $n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{2}$ pour lesquels $\sin u=+1$.

Il en serait de même des points pour lesquels $\sin u=-1$, c'est-à-dire des points $n\pi-(-1)^n\frac{\pi}{2}$.

La fonction $\sin u$ devient infinie pour u égal aux valeurs de l'intégrale $\int_0^\infty \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$, et il résulte de ce que nous avons vu que ces valeurs se composent d'une partie réelle arbitraire, jointe à une partie imaginaire infinie. Donc $\sin u$ ne devient infini pour aucune valeur finie de u.

Donc nous avons démontré que la valeur de $\cos u$ est uniforme pour toute valeur de u.

1281. Pour étudier maintenant la périodicité de la fonction $\cos u$, considérons l'équation transcendante

$$\cos u=\cos u_0.$$

En remplaçant le cosinus par sa valeur $\pm\sqrt{1-\sin^2 u}$, cette équation entraîne une des deux suivantes :

(1) $$\sin u = +\sin u_0, \quad \sin u = -\sin u_0.$$

La première de ces équations donne

$$u = n\pi + (-1)^n u_0.$$

Si l'on désigne maintenant par C le chemin quelconque que l'on a décrit pour obtenir l'intégrale u_0, il résulte de ce que nous avons dit au nº 1255 que l'on obtiendra la valeur de u en faisant précéder le chemin C du parcours alternatif des deux contours $(+1)$, (-1), en commençant par le premier ou le second suivant que n est pair ou impair, et faisant un nombre total de tours égal à n.

Or, à chaque parcours d'un contour élémentaire, le radical change de signe. S'il est donc parti avec le signe $+1$, il aura, après les n parcours, le signe de $(-1)^n$. Donc il partira, pour décrire le chemin C, avec la valeur $(-1)^n$. Il arrivera donc au point correspondant à u_0 avec la valeur $(-1)^n \cos u_0$. Donc

$$\cos[n\pi + (-1)^n u_0] = (-1)^n \cos u_0,$$

et, pour que cette valeur soit égale à $+\cos u_0$, il faut que n soit pair, ce qui donne une première solution exprimée par la formule

(2) $$\cos(2n\pi + u_0) = \cos u_0.$$

La seconde équation (1) donne

$$u = n\pi - (-1)^n u_0,$$

et l'on en tirera comme ci-dessus

$$\cos(2n\pi - u_0) = \cos(-u_0).$$

Or $\cos u = \sqrt{1-\sin^2 u} = \sqrt{1-\sin^2(-u)}$ est une fonction paire de u, et l'on a

$$\cos(-u_0) = \cos u_0.$$

Donc on aura encore

$$\cos(2n\pi - u_0) = \cos u_0.$$

Par conséquent, toutes les valeurs de u pour lesquelles le cosinus

sera égal à $\cos u_0$ seront données par la formule

$$\cos(2n\pi \pm u_0) = \cos u_0.$$

1282. Ajoutons encore quelques détails sur la marche de la fonction $\cos u$.

Tandis que z décrit l'axe des x positifs, de o à $+\infty$, en passant au-dessus du point $+1$, nous avons vu que, de o à $+1$, $\sqrt{1-z^2}$ varie de $+1$ à o, tandis que u croît de o à $\frac{\pi}{2}$, d'où

$$\cos 0 = 1, \quad \cos\frac{\pi}{2} = 0.$$

A partir de $z=1$, le radical $\sqrt{1-z^2}$ prend des valeurs imaginaires de la forme $-ig^2$, correspondantes à des valeurs de u de la forme $\frac{\pi}{2}+ih^2$. Donc la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{2}+ih^2\right)$ est de la forme $-ig^2$.

Pour z infini réel, $\sqrt{1-z^2}$ a pour valeur $-i\infty$, d'où

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+i\infty\right) = -i\infty.$$

Si z s'éloigne à l'infini, suivant une direction d'argument p, le sinus étant égal à ∞e^{ip}, le cosinus aura, comme le sinus, une valeur complexe infinie, dont la valeur approchée est $-i\infty e^{ip}$, correspondante à l'arc $\frac{\pi}{2}-p+i\infty$.

Pour $p=\frac{\pi}{2}$, la valeur de $\cos u$ devient $+\infty$ pour $u=+i\infty$.

De $u=0$ à $u=+i\infty$, $\cos u$ a des valeurs réelles croissant de $+1$ à $+\infty$.

Nous avons discuté la courbe décrite par u lorsque z parcourt un chemin rectiligne partant de l'origine. Il est aisé d'obtenir la courbe correspondante décrite par le cosinus $\sqrt{1-z^2}$. Elle a pour équation

$$\sqrt{1-z^2} = \xi + i\eta = \sqrt{1-r^2e^{2ip}},$$

ou, en éliminant r,

$$\xi^2 - 2\xi\eta\cot 2p - \eta^2 = 1,$$

équation d'une hyperbole dont les asymptotes font avec Ox les angles p et $p - \frac{\pi}{2}$.

Le carré du module de $\cos u = \sqrt{1 - r^2 e^{2ip}}$ est

$$\rho^2 = 1 - 2r^2 \cos 2p + r^4,$$

dont la valeur atteint un minimum pour $r^2 = \cos 2p$, et l'on a alors $\rho = \sin 2p$.

Si l'on désigne par ϖ l'argument de $\sqrt{1 - z^2}$, on trouve

$$\operatorname{tang} 2\varpi = \frac{-r^2 \sin 2p}{1 - r^2 \cos 2p} = \frac{\operatorname{tang} 2p}{1 - \dfrac{1}{r^2 \cos 2p}}.$$

Pour $r = 0$, $\cos u = 1$, $\operatorname{tang} 2\varpi = 0$, $\varpi = 0$. Pour r croissant à partir de zéro, $\operatorname{tang} 2\varpi$ devient négatif, si p est $< \frac{\pi}{4}$, pour redevenir positif après avoir passé par ∞, et le rayon $\rho e^{i\varpi}$ va en s'écartant de la droite re^{ip}, jusqu'à ce que, pour $r = \infty$, il lui devienne perpendiculaire.

Nous engageons le lecteur à construire et à comparer, pour un chemin rectiligne donné de $z = \sin u$, les courbes décrites par les fonctions u et $\cos u$.

1283. Nous avons vu [827, III] que, étant donnés deux arguments u, u_1 dont la somme est constante, leurs sinus z, z_1 satisfont à la relation

$$z\sqrt{1 - z_1^2} + z_1\sqrt{1 - z^2} = \text{const.},$$

et la constante n'est autre chose que ce que devient le sinus de l'un des arguments, quand l'autre argument s'annule, les radicaux devant se réduire chacun à $+1$ pour z ou z_1 nul. On peut écrire cette relation sous la forme

$$\sin u \cos u_1 + \sin u_1 \cos u = \sin(u + u_1).$$

Si l'on y fait $u_1 = -\frac{\pi}{2}$, il vient $\sin u_1 = -1$ et

$$-\cos u = \sin\left(u - \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - u\right),$$

d'où

$$\cos u = \sin\left(\frac{\pi}{2} - u\right).$$

On tire de là et des formules précédentes toutes les relations qui lient entre elles les fonctions sinus et cosinus.

1284. IV. Traitons, pour dernier exemple, l'inversion de l'intégrale elliptique

$$u = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}} = \int_0^z \frac{dz}{R(z)}.$$

Nous avons vu que toutes les valeurs possibles de cette intégrale, correspondantes aux valeurs de la limite supérieure z, s'obtiennent en faisant précéder l'intégration rectiligne correspondante à cette limite d'une ou de plusieurs intégrations effectuées le long des quatre contours élémentaires (± 1), $\left(\pm \frac{1}{k}\right)$, et que toutes ces valeurs sont distribuées d'une manière identique dans chacun des rectangles de dimensions $4K$ et $2K'$, dans lesquels on peut partager le plan des u.

Il résulte de là que z, considéré comme fonction de u, est une fonction doublement périodique, ayant pour périodes $4K$ et $2iK'$.

Il nous reste à établir que cette fonction est uniforme et continue, et pour cela il nous suffira de considérer les valeurs rectilignes de l'intégrale u, et de montrer qu'elles remplissent complètement et une seule fois l'étendue de l'un de ces rectangles, celui qui a pour centre l'origine des coordonnées.

Faisons d'abord parcourir à z les axes coordonnés. L'axe des x positifs contient les deux points de ramification $+1$ et $+\frac{1}{k}$. En évitant le point $+1$ au moyen d'un demi-cercle supérieur, on aura d'abord, comme au n° 1276, l'intégrale $\int_0^{1-\rho} \frac{dz}{R(z)}$, qui a pour limite K [1262], puis l'intégrale semi-circulaire

$$-\rho^{\frac{1}{2}} \int_\pi^0 \frac{e^{\frac{1}{2}ip}\,dp}{\sqrt{Z}},$$

qui s'évanouit avec ρ, et dont la valeur approchée à une fraction

près infiniment petite d'elle-même sera

$$-\frac{\sqrt{\rho}}{\sqrt{2k'^2}}\int_{\pi}^{0} e^{\frac{1}{2}ip}\,dp = \frac{1+i}{k'}\sqrt{2\rho}.$$

Dans le parcours du demi-cercle supérieur, $z = 1 + \rho e^{ip}$ variant de $1-\rho$ à $1+\rho$, $1-z$ variera depuis $-\rho e^{i\pi} = +\rho$ à $-\rho$, et $\sqrt{1-z}$ depuis $\pm i\rho^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}i\pi}$ jusqu'à $\pm i\rho^{\frac{1}{2}}$, et, comme la première de ces valeurs doit se réduire à $+\sqrt{\rho}$, on doit prendre pour les deux le signe inférieur, de telle sorte que $\sqrt{1-z}$ variera de $+\sqrt{\rho}$ à $-i\sqrt{\rho}$. Donc, entre les points $+1$ et $+\frac{1}{k}$, le radical $\sqrt{1-z}$ et par suite aussi le radical $R(z)$ devront prendre des valeurs de la forme $-ih^2$. L'élément de l'intégrale sera donc, dans cet intervalle, de la forme $+ih^2$, et il en sera de même, par conséquent, de l'intégrale

$$\int_{1}^{\frac{1}{k}} \frac{dz}{R(z)} = iK',$$

K' étant réel et positif. On aura donc

$$\int_{0}^{\frac{1}{k}} \frac{dz}{R(z)} = K + iK'.$$

De $z = \frac{1}{k}$ à $z = +\infty$ l'intégrale s'accroît de la valeur

$$\int_{\frac{1}{k}}^{\infty} \frac{dz}{R(z)},$$

que nous avons trouvée égale à $-K$. Donc on aura

$$\int_{0}^{\infty} \frac{dz}{R(z)} = +iK',$$

de sorte que, lorsque z parcourt l'axe des x, en évitant les deux points critiques $+1$ et $+\frac{1}{k}$, suivant des demi-cercles *supérieurs*, u variera de 0 à k par des accroissements réels positifs, puis de K

à $K + iK'$ par des accroissements de la forme $+ih^2$, et enfin de $K + iK'$ à $+iK'$ par des accroissements réels négatifs.

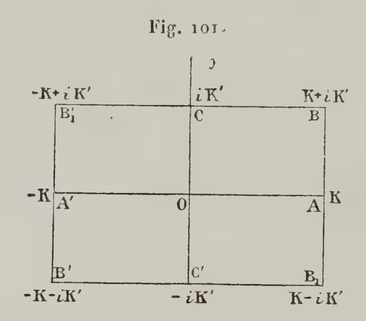
De $z = 0$ à $z = +i\infty$, sur l'axe des y, u variera d'une manière continue depuis 0 à $+iK'$.

Si l'on évite les points critiques sur l'axe des x négatifs suivant des demi-cercles *inférieurs*, on verra de même que u variera 1° de 0 à $-K$, 2° de $-K$ à $-K - iK'$, 3° de $-K - iK'$ à $-iK'$.

Sur l'axe des y négatifs, u variera de 0 à $-i\infty$.

Ainsi, si l'on construit un rectangle de centre 0 et compris entre les droites $x = \pm K$, $y = \pm K'$, on voit que, tandis que z parcourra l'axe des x positifs, u parcourra la portion de contour OABCO (*fig.* 101). Si z parcourt l'axe des x négatifs, u parcourra OA'B'C'O (¹); z parcourant les axes des y positifs et négatifs, u parcourra les droites OC et OC'.

Fig. 101.



1287. Supposons maintenant que z décrive un chemin rectiligne re^{ip}. L'argument de la différentielle $\frac{dz}{R(z)}$ sera égal à l'argument p de dz, moins l'argument de $R(z)$, lequel est la demi-somme des arguments des facteurs

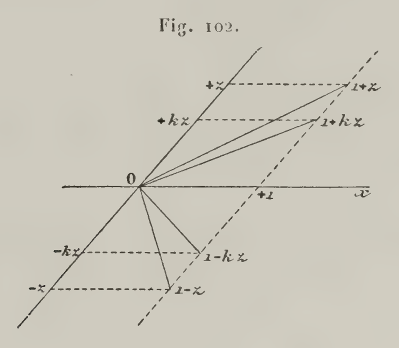
$$1 + z,\quad 1 - z,\quad 1 + kz,\quad 1 - kz$$

de la quantité sous le radical. On verrait (*fig.* 102), comme au n° 1277, que, pour r variant de 0 à ∞, les arguments des fac-

(¹) Si z eût évité les points ± 1 par des demi-cercles tournés en sens contraire des précédents, u aurait parcouru les deux autres portions du contour $OAB_1C'O$, $OA'B'_1CO$.

teurs $1+z$, $1+kz$ varient de 0 à p; ceux de $1-z$, $1-kz$, de 0 à $p-\pi$. Donc leur demi-somme varie de 0 à $2p-\pi$, d'où il s'en-

Fig. 102.



suit que l'argument de la différentielle varie de $p-0=p$ à $p-(2p-\pi)=\pi-p$.

D'autre part, l'intégrale $\int_0^r \frac{e^{ip}dr}{R(re^{ip})}$ étant égale à l'intégrale $\int_0^r \frac{dx}{R(x)}$, plus à l'intégrale prise le long de l'arc de cercle de rayon r compris entre Ox et la droite re^{ip}, et cette dernière intégrale étant nulle pour $r=\infty$, on aura, quel que soit p, compris entre 0 et π,

$$\int_0^\infty \frac{e^{ip}dr}{R(re^{ip})} = iK'.$$

Donc, toutes les courbes u correspondantes aux diverses valeurs de p passeront par le point C de la *fig.* 100, et leurs tangentes en O et en C formeront avec OC un triangle isoscèle.

L'argument de la tangente pour r, variant de 0 à ∞, varie de p à $\pi-p$, d'une manière continue et toujours dans le même sens. De plus, on verrait, comme aux n^{os} **1272** et **1277**, que deux courbes u consécutives sont infiniment voisines dans toute leur étendue et n'ont d'autres points communs que leurs extrémités.

Donc, si l'on fait varier p de 0 à $\frac{\pi}{2}$, la courbe u variera d'une manière continue depuis la forme du contour OABC (*fig.* 101) jusqu'à celle de la droite OC. Donc les courbes u remplissent complétement et une seule fois l'arc du rectangle OABC.

On verrait de la même manière, à cause de la symétrie, que, pour les valeurs de p prises dans les autres quadrants, les courbes u remplissent pareillement les trois autres parties du rectangle $B_1 B B'_1 B'$. Donc chaque point u de l'intérieur de ce rectangle correspond à une valeur déterminée de z et à une seule. Donc z est déterminé uniformément par un point quelconque de l'aire du rectangle, c'est-à-dire que z est, dans l'intérieur de cette aire, une fonction monogène, uniforme et continue de la variable u.

1288. Si, avant de décrire le chemin rectiligne correspondant à la valeur u de l'intégrale, on avait commencé par décrire le contour élémentaire (-1), l'intégrale u serait devenue $2K - u$. Donc la même valeur de z qui correspond à u correspond aussi au point $(2K - u)$. L'un de ces deux points, et un seul, est contenu dans le rectangle de largeur $4K$ et de hauteur $2iK'$, dont le point K occupe le centre, et il est facile de voir que ces points remplissent toute la différence entre l'aire de ce rectangle et celle du rectangle de largeur $2K$ qui contient tous les points u correspondants aux premières intégrales rectilignes.

Donc la fonction $z = \psi(u)$ prend toutes les valeurs possibles en deux points, et en deux seulement, situés dans l'intérieur du rectangle compris entre les droites $x = K \pm 2K$, $y = \pm K'$, et disposés symétriquement par rapport au point $(x = +K, y = 0)$.

Si l'on divise entièrement le plan en rectangles égaux à celui que nous venons de considérer, les mêmes valeurs de z se reproduiront deux fois dans chaque rectangle, et elles seront disposées sur des parallèles à l'axe des x, à la distance $4K$ les unes des autres, et en même temps sur des parallèles à l'axe des y, à la distance $2K'$.

1289. Si dans l'intégrale

$$u = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}}$$

on pose $z = \sin\varphi$, l'intégrale prendra la forme

$$u = \int_0 \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}}.$$

Cet angle φ, considéré comme fonction de l'intégrale u, est dit l'*amplitude* de l'argument u, et on le désigne par

$$\varphi = \arcsin z = \operatorname{am} u.$$

La variable z, d'après cette notation, sera le sinus de l'amplitude de u, et pourra être représentée par la notation

$$z = \sin \operatorname{am} u.$$

Pour abréger l'écriture, nous adopterons la notation plus commode de Gudermann, et nous écrirons simplement

$$z = \operatorname{sn} u.$$

Cela posé, les relations précédentes nous montrent que l'on a, quels que soient les entiers m, n,

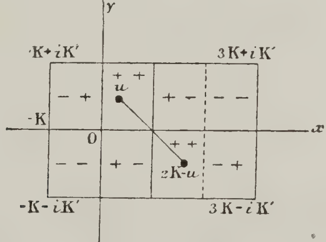
$$\operatorname{sn} u = \operatorname{sn}[2m\mathrm{K} + 2ni\mathrm{K}' + (-1)^m u],$$

et, si m est pair, en écrivant $2m$ au lieu de m,

$$\operatorname{sn} u = \operatorname{sn}(4m\mathrm{K} + 2ni\mathrm{K}' + u),$$

d'où l'on voit que la fonction $\operatorname{sn} u$ est doublement périodique, les périodes étant $4\mathrm{K}$ et $2i\mathrm{K}'$.

Fig. 103.



En particulier, on a

$$\operatorname{sn}(-u) = -\operatorname{sn} u.$$

Pour $u = 0$, on a

$$\operatorname{sn} 0 = \operatorname{sn}(2m\mathrm{K} + 2ni\mathrm{K}') = 0,$$

$$\operatorname{sn}(\pm \mathrm{K}) = \operatorname{sn}[(4m \pm 1)\mathrm{K} + 2ni\mathrm{K}'] = \pm 1.$$

En remarquant que $\int_0^{i\infty} \frac{dz}{R(z)} = i\mathrm{K}'$, on en conclut

$$\operatorname{sn}(\pm i\mathrm{K}') = \operatorname{sn}[2m\mathrm{K} + (2n+1)i\mathrm{K}'] = \pm i\infty.$$

Enfin, $\int_0^{\frac{1}{k}} \frac{dz}{R(z)}$ étant égal à $\mathrm{K} \pm i\mathrm{K}'$, on aura

$$\sin(\mathrm{K} \pm i\mathrm{K}') = \frac{1}{k}.$$

Les signes $+$ et $-$ que contient chacun des rectangles de la *fig.* 103 indiquent de laquelle des quatre formes $\pm g^2 \pm ih^2$ est la valeur correspondante de $\operatorname{sn} u$. Il en est de même pour les *fig.* 104 et 105, relatives aux autres fonctions elliptiques.

1290. De même que, en étudiant l'inversion de l'intégrale $\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$, nous avons considéré, outre la limite supérieure z, le radical $\sqrt{1-z^2}$ comme une fonction de l'intégrale, nous considérerons aussi comme des fonctions inverses de l'intégrale elliptique $\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}\sqrt{1-k^2z^2}}$ les deux facteurs du radical $\sqrt{1-z^2}$ et $\sqrt{1-k^2z^2}$.

La première de ces fonctions,

$$\sqrt{1-z^2} = \sqrt{1-\sin^2\varphi} = \cos\varphi = \cos \operatorname{am} u,$$

est analogue à un cosinus; nous la représenterons, pour abréger, par

$$\sqrt{1-\operatorname{sn}^2 u} = \operatorname{cn} u.$$

La seconde fonction, que l'on représente par

$$\sqrt{1-k^2z^2} = \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} = \Delta\varphi,$$

n'a pas d'analogue parmi les fonctions circulaires. Si l'on supposait $k=0$, auquel cas u se réduirait à φ, et par suite $\operatorname{am} u$ à u, $\operatorname{sn} u$ à $\sin u$, $\operatorname{cn} u$ à $\cos u$, la fonction $\Delta\varphi = \Delta \operatorname{am} u$ se réduirait à

l'unité. Nous la désignerons par

$$\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u} = \operatorname{dn} u.$$

Les valeurs de la fonction uniforme sn$u$ étant connues, on connaîtra par là même les valeurs numériques des fonctions cn$u$, dn$u$; mais il reste à voir comment varieront leurs signes.

1291. Considérons d'abord la fonction $\operatorname{cn} u = \sqrt{1 - \operatorname{sn}^2 u}$. Bien qu'elle soit donnée par un radical susceptible d'une double détermination, nous allons montrer, comme nous l'avons fait pour la fonction cos$u$, que les points pour lesquels elle s'annule ou devient infinie ne sont pas des points de ramification, et que, pour toute valeur de u, cn$u$ a un signe complétement déterminé.

La fonction cn$u$ s'annule pour les valeurs de u correspondantes à $\operatorname{sn} u = \pm 1$, c'est-à-dire que l'on a

$$\operatorname{cn}[(4m \pm 1)K + 2niK'] = 0.$$

Examinons d'abord le cas du signe supérieur, qui répond à

$$\operatorname{sn} u = +1,$$

et cherchons la valeur de cn$u$ pour u voisin de K et égal à $K + \varepsilon$.

En vertu de la formule

$$\operatorname{sn}(2K - u) = \operatorname{sn} u,$$

on aura

$$\operatorname{sn}(K + \varepsilon) = \operatorname{sn}(K - \varepsilon).$$

Donc $\operatorname{sn}(K + \varepsilon)$ est une fonction paire de ε, et son développement suivant les puissances de ε ne pourra contenir que des puissances paires et sera de la forme

$$\operatorname{sn}(K + \varepsilon) = 1 + a\varepsilon^2 + b\varepsilon^4 + \ldots.$$

On en tire

$$\operatorname{cn}(K + \varepsilon) = \sqrt{1 - (1 + a\varepsilon^2 + b\varepsilon^4 + \ldots)^2}$$
$$= \varepsilon\sqrt{-2a + a'\varepsilon^2 + b'\varepsilon^4 + \ldots}.$$

Pour ε infiniment petit, $\operatorname{cn}(K + \varepsilon)$ est sensiblement proportionnel à cette variable complexe ε, et par suite, le radical, qui est fini, ne pouvant changer de signe, pour une variation infiniment petite de ε, le point $u = K$ n'est pas un point de ramification de la fonc-

tion $\operatorname{cn} u$. Il en sera de même pour la valeur K augmentée de $4mK + 2niK'$, c'est-à-dire pour tous les points correspondants à $\operatorname{sn} u = +1$.

Si l'on considère maintenant un quelconque des points pour lesquels $\operatorname{sn} u = -1$, comme on a toujours

$$\operatorname{sn}(-u) = -\operatorname{sn} u,$$

la fonction $-\operatorname{sn} u$ prendra dans le voisinage de ce point les mêmes valeurs que $+\operatorname{sn} u$ dans le cas précédent, et l'on verra de la même manière que ce point n'est pas non plus un point de ramification de $\operatorname{cn} u$.

Passons maintenant aux points $2mK + (2n+1)iK'$, qui donnent $\operatorname{sn} u = \infty$. Si dans l'intégrale [1264]

$$\int_{\infty}^{z} \frac{dz}{R(z)} = \int_{0}^{z} \frac{dz}{R(z)} - \int_{0}^{\infty} \frac{dz}{R(z)} = u - iK'$$

on pose $z = \frac{1}{kz'}$, cette intégrale se change en

$$\int_{0}^{z'} \frac{dz'}{R(z')} = u - iK'.$$

Donc

$$\operatorname{sn}(u - iK') = z' = \frac{1}{k \operatorname{sn} u}.$$

Par conséquent, en faisant $u = -\varepsilon$, on a

$$\operatorname{sn}(iK' + \varepsilon) = \frac{1}{k \operatorname{sn} \varepsilon},$$

d'où

$$\operatorname{cn}(iK' + \varepsilon) = \frac{\sqrt{-1 + k^2 \operatorname{sn}^2 \varepsilon}}{k \operatorname{sn} \varepsilon}.$$

Il s'ensuit de là que, pour ε assez petit, $\operatorname{cn}(iK' + \varepsilon)$ est sensiblement proportionnel à $\frac{1}{\operatorname{sn} \varepsilon}$, et, partant, iK' et les autres infinis de $\operatorname{sn} u$ ne sont pas des points de ramification de $\operatorname{cn} u$.

Donc $\operatorname{cn} u$ est, comme $\operatorname{sn} u$, une fonction toujours uniforme de u.

De plus, lorsque z parcourt deux chemins symétriques par rapport à l'origine O, $\sqrt{1 - z^2}$ partant avec la même valeur dans les

deux cas, les deux chemins entoureront autant de fois l'un que l'autre les points de ramification de ce radical. Donc à deux valeurs égales et de signes contraires de $z = \operatorname{sn} u$ et aussi de u correspondront deux valeurs égales et de même signe de $\sqrt{1 - z^2} = \operatorname{cn} u$. Donc la fonction cn$u$ est une fonction *paire* de u.

1292. Pour déterminer la périodicité de cn$u$, nous remarquerons, comme au n° **1281**, que les racines de l'équation

$$\operatorname{cn} u = \operatorname{cn} u_0$$

doivent être comprises parmi les racines des deux équations

$$\operatorname{sn} u = + \operatorname{sn} u_0, \quad \operatorname{sn} u = - \operatorname{sn} u_0,$$

qui sont vérifiées par les valeurs

$$u = 2mK + 2niK' \pm (-1)^m u_0.$$

Soit C le chemin quelconque décrit par z pour obtenir la valeur u_0 de l'intégrale $\int_0^z \frac{dz}{R(z)}$. On obtiendra u [1289] en faisant parcourir à z, avant le chemin C, n fois alternativement les contours élémentaires $\left(+\frac{1}{k}\right)$, $\left(-\frac{1}{k}\right)$, puis $m - n$ fois alternativement les contours $(+1)$, (-1). Or le radical $\sqrt{1 - z^2}$ n'a pas d'autres points de ramification que $+1$ et -1; il changera donc de signe seulement $m - n$ fois dans le parcours des contours élémentaires, de sorte que l'on aura

$$\operatorname{cn}[2mK + 2niK' \pm (-1)^m u_0] = (-1)^{m-n} \operatorname{cn}(\pm u_0) = (-1)^{m-n} \operatorname{cn} u_0,$$

formule que l'on peut écrire plus simplement

$$\operatorname{cn}(2mK + 2niK' \pm u) = (-1)^{m+n} \operatorname{cn} u.$$

En remplaçant tour à tour m par $2m$ et par $2m + 1$, on en tirera

$$\operatorname{cn}(4mK + 2niK' \pm u) = (-1)^n \operatorname{cn} u,$$
$$\operatorname{cn}[(4m + 2)K + 2niK' \pm u] = (-1)^{n+1} \operatorname{cn} u.$$

En particulier, on trouve

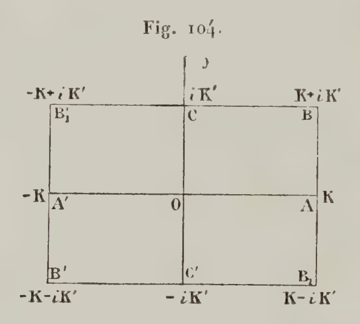
$$\begin{aligned}\operatorname{cn} u &= \operatorname{cn}(4\mathrm{K} + u)\\ &= \operatorname{cn}(2\mathrm{K} + 2i\mathrm{K}' + u)\\ &= -\operatorname{cn}(2\mathrm{K} + u)\\ &= -\operatorname{cn}(2i\mathrm{K}' + u).\end{aligned}$$

La fonction $\operatorname{cn} u$ a donc pour périodes $4\mathrm{K}$ et $2\mathrm{K} + 2i\mathrm{K}'$.

1293. Examinons la marche de la fonction $\operatorname{cn} u$ pour les diverses valeurs de u.

Lorsque z parcourt l'axe des x positifs (*au-dessus* des points de ramification) et que u parcourt le chemin correspondant OABC (*fig.* 104), le radical $\sqrt{1 - z^2}$ est d'abord réel et positif, de $z = 0$

Fig. 104.



à $z = +1$ ou de $u = 0$ à $u = \mathrm{K}$; puis il prend une valeur imaginaire négative, de la forme $-ih^2$, lorsque z varie de $+1$ à $+\frac{1}{k}$ et de $+\frac{1}{k}$ à $+\infty$, c'est-à-dire lorsque u varie de K à $\mathrm{K} + i\mathrm{K}'$ et de $\mathrm{K} + i\mathrm{K}'$ à $+i\mathrm{K}'$. Pour passer de $z = +\infty$ à $z = +i\infty$, il faut multiplier z par $e^{\frac{i\pi}{2}} = i$, et, par suite,

$$\sqrt{1 - z^2} = -i\sqrt{z^2 - 1} = -iz\sqrt{1 - \frac{1}{z^2}}$$

devient $+z\sqrt{1 - \frac{1}{z^2}}$, valeur réelle et positive pour z imaginaire

pure. On a donc les valeurs

$$\operatorname{cn} 0 = 1,$$
$$\operatorname{cn} K = 0,$$
$$\operatorname{cn}(K + iK') = -i\sqrt{\frac{1}{k^2} - 1} = -\frac{ik'}{k},$$
$$\operatorname{cn} iK' = +\infty.$$

Si l'on avait décrit l'axe des x positifs en passant *au-dessous* du point $+1$, u aurait pris, pour $z = \frac{1}{k}$, la valeur $K - iK'$, $\sqrt{1 - z^2}$ étant de la forme $+ih^2$. Donc

$$\operatorname{cn}(K - iK') = +\frac{ik'}{k}.$$

Si z décrit l'axe imaginaire positif, de zéro à $+i\infty$, u croît de zéro à $+iK'$, et $\sqrt{1 - z^2}$ depuis 1 jusqu'à $+\infty$, en restant toujours réel.

Si l'on fait prendre maintenant à u des valeurs égales et de signe contraire aux précédentes, la fonction $\operatorname{cn} u$ reprendra les mêmes valeurs que ci-dessus, puisque $\operatorname{cn}(-u) = \operatorname{cn} u$.

Lorsque z décrit un chemin rectiligne re^{ip}, on verrait, comme au nº 1282, que $\sqrt{1 - z^2}$ décrit une hyperbole équilatère représentée par l'équation $\rho^2 = \frac{\sin 2p}{\sin 2(p - \varpi)}$, qui ne dépend que de la cotangente de l'angle $2p$, et qui correspond, par conséquent, aux valeurs p et $p \pm \frac{\pi}{2}$ de l'angle p; son module minimum a pour valeur $\sin 2p$. Pour $r = 0$, l'argument de la valeur de $\operatorname{cn} u$ est nul; si z s'éloigne de l'origine dans un sens ou dans l'autre, l'argument de $\sqrt{1 - z^2}$ tend vers celui de l'une ou de l'autre des asymptotes de l'hyperbole, en vertu de la relation

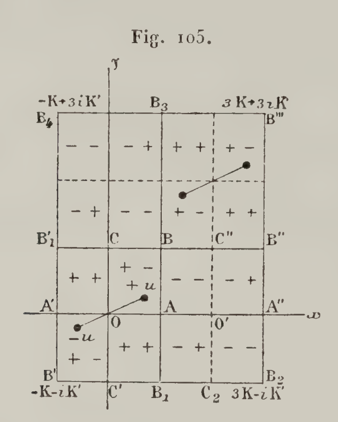
$$\operatorname{tang} 2\varpi = \frac{\operatorname{tang} 2p}{1 - \frac{1}{r^2 \cos 2p}},$$

qui, pour $r = \pm\infty$, donne $\operatorname{tang} 2\varpi = \operatorname{tang} 2p$, d'où $\varpi = p$ ou $p - \frac{\pi}{2}$. Le point $\sqrt{1 - z^2}$ décrira l'une ou l'autre des branches de

l'hyperbole, suivant que le radical partira de zéro avec la valeur $+1$ ou avec la valeur -1.

La figure ci-jointe (*fig.* 105) indique la distribution, dans chaque

Fig. 105.



rectangle de dimensions $4K$ et $4K'$, des diverses valeurs de u qui correspondent à une même valeur de la fonction $\operatorname{cn} u$.

Si u parcourt une des courbes renfermées dans le rectangle OABC ou dans le rectangle $OA'B'C'$ (*fig.* 104), on voit aisément que, pour p aigu, le point $\sqrt{1-z^2}$ décrit la partie inférieure de la branche de droite de l'hyperbole, c'est-à-dire que $\operatorname{cn} u$ est de la forme $g^2 - ih^2$. Pour l'angle obtus $p + \frac{\pi}{2}$, correspondant à la même hyperbole, $\sqrt{1-z^2}$ décrit la partie supérieure de la même branche, et, par suite, $\operatorname{cn} u$ est de la forme $g^2 + ih^2$.

De l'équation $\operatorname{cn}(2K \pm u) = -\operatorname{cn} u$, on conclut que, dans les quatre rectangles qui composent le rectangle BB_1B_2B'' (*fig.* 104), les signes sont respectivement contraires à ceux des quatre rectangles qui composent $BB'_1B'B_1$.

L'équation $\operatorname{cn}(2iK' \pm u) = -\operatorname{cn} u$ montre qu'il en est de même pour les rectangles qui composent $BB_3B_4B'_1$ et que les signes, dans le rectangle $BB''B'''B_3$, sont les mêmes que dans $BB'_1B'B_1$.

On voit que $\operatorname{cn} u$, comme $\operatorname{sn} u$, parcourt la série complète de ses valeurs dans l'étendue d'un rectangle de dimensions $4K$ et $2K'$, et que, dans deux de ces rectangles composant un rectangle de dimensions $4K$ et $4K'$, les valeurs égales sont disposées symétriquement par rapport au centre B de ce dernier rectangle.

1294. Des propriétés des fonctions $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$ résultent immédiatement celles de leur quotient, qui forme une nouvelle fonction elliptique, analogue à la tangente circulaire :

$$\frac{z}{\sqrt{1-z^2}} = \operatorname{tang} \operatorname{am} u = \operatorname{tn} u = \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u}.$$

Les valeurs de u pour lesquelles la fonction $\operatorname{tn} u$ reprend la même valeur sont celles pour lesquelles les deux fonctions $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$ reprennent des valeurs respectives soit égales et de même signe, soit égales et de signe contraire.

Or on a [1289 et 1292]

$$\operatorname{sn} u = \operatorname{sn}[2mK + 2niK' + (-1)^m u],$$
$$\operatorname{cn} u = (-1)^{m+n} \operatorname{cn}(2mK + 2niK' \pm u),$$

le signe $\pm$, dans la dernière formule, pouvant être choisi à volonté. En discutant les formes communes aux valeurs générales des arcs correspondants à $+\operatorname{sn} u$ et à $+\operatorname{cn} u$, ou à $-\operatorname{sn} u$ et $-\operatorname{cn} u$, on trouvera, pour la formule générale des arcs qui répondent à une même valeur de $\operatorname{tn} u$,

$$\operatorname{tn} u = \operatorname{tn}[2mK + 2niK' + (-1)^n u].$$

On a, de plus,

$$\operatorname{tn}(-u) = -\operatorname{tn} u,$$
$$\operatorname{tn} 0 = \operatorname{tn}(2mK + 2niK') = 0,$$
$$\operatorname{tn} K = \operatorname{tn}[(2m+1)K + 2niK'] = \infty,$$
$$\operatorname{tn}(\pm iK') = \lim_{z=i\infty} \frac{\pm z}{\sqrt{1-z^2}} = \lim_{z=i\infty} \frac{\pm 1}{\sqrt{1-\frac{1}{z^2}}} = \pm 1,$$
$$\operatorname{tn}(K + iK') = \operatorname{tn}[(2m+1)K + (2n+1)iK'] = \frac{i}{k'}.$$

1295. Il nous reste à étudier la fonction

$$\sqrt{1-k^2z^2} = \Delta \operatorname{am} u = \operatorname{dn} u.$$

On démontrera, absolument comme on l'a fait pour la fonction $\operatorname{cn} u$, que $\operatorname{dn} u$ est une fonction uniforme de u dans toute l'étendue du plan. On a ensuite, à cause de la symétrie,

$$\operatorname{dn}(-u) = +\operatorname{dn} u.$$

Pour déterminer maintenant la périodicité de $\operatorname{dn} u$, remarquons

que les valeurs de u qui font reprendre à $\mathrm{dn}\,u$ une même valeur $\mathrm{dn}\,u_0$ doivent être comprises dans celles que donne la formule

$$u = 2m\mathrm{K} + 2ni\mathrm{K}' \pm (-1)^m u_0$$

et pour lesquelles $\mathrm{sn}^2 u = \mathrm{sn}^2 u_0$. La première s'obtient en faisant précéder le chemin C, qui donne la valeur u_0, du parcours alternatif des deux contours élémentaires $\left(+\frac{1}{k}\right)$, $\left(-\frac{1}{k}\right)$, répété n fois, plus du parcours alternatif des deux contours élémentaires $(+1)$, (-1), répété $m-n$ fois. Donc le radical $\sqrt{1-k^2z^2}$ aura changé n fois de signe, et, par suite, il aura été multiplié par $(-1)^n$; on aura donc

$$\mathrm{dn}[2m\mathrm{K} + 2ni\mathrm{K}' \pm (-1)^m u_0] = (-1)^n \mathrm{dn}(\pm u_0) = (-1)^n \mathrm{dn}\,u_0,$$

ou, plus simplement,

$$\mathrm{dn}(2m\mathrm{K} + 2ni\mathrm{K}' \pm u) = (-1)^n \mathrm{dn}\,u.$$

En remplaçant tour à tour n par $2n$ et par $2n+1$, on en tirera

$$\mathrm{dn}(2m\mathrm{K} + 4ni\mathrm{K}' \pm u) = \mathrm{dn}\,u,$$
$$\mathrm{dn}[2m\mathrm{K} + (4n+2)i\mathrm{K}' \pm u] = -\mathrm{dn}\,u.$$

En particulier,

$$\begin{aligned} \mathrm{dn}\,u &= \mathrm{dn}(-u) \\ &= \mathrm{dn}(2\mathrm{K}+u) \\ &= \mathrm{dn}(4i\mathrm{K}'+u) \\ &= -\mathrm{dn}(2i\mathrm{K}'+u). \end{aligned}$$

La fonction $\mathrm{dn}\,u$ a donc pour périodes $2\mathrm{K}$ et $4i\mathrm{K}'$.

Lorsque z et u parcourent l'un l'axe des x positifs, l'autre le chemin OABC (*fig.* 101), de $z=0$ à $z=\frac{1}{k}$, ou de $u=0$ à $u=\mathrm{K}+i\mathrm{K}'$, $\sqrt{1-k^2z^2}$ varie de $+1$ à zéro; de $z=\frac{1}{k}$ à $z=+\infty$, ou de $u=\mathrm{K}+i\mathrm{K}'$ à $u=+i\mathrm{K}'$, $\sqrt{1-k^2z^2}$ est de la forme $-ih^2$ et varie de zéro à $-i\infty$. De $z=+\infty$ à $z=+i\infty$,

$$\sqrt{1-k^2z^2} = -i\sqrt{z^2-1} = -i\infty$$

est multiplié par $e^{\frac{i\pi}{2}} = i$, et devient $=+\infty$. Donc on a

$$\mathrm{dn}\,0 = 1,$$
$$\mathrm{dn}(\mathrm{K}+i\mathrm{K}') = 0,$$
$$\mathrm{dn}\,i\mathrm{K}' = +\infty.$$

Si z avait évité le point $+1$ en passant *au-dessous*, on aurait eu, pour $z=\frac{1}{k}$, $u=K-iK'$, et $\sqrt{1-k^2z^2}$ aurait pris, au delà de ce point, des valeurs de la forme $+ih^2$. Dans ce cas, on aurait eu

$$\operatorname{dn}(K-iK')=0, \quad \operatorname{dn}(-iK')=-\infty.$$

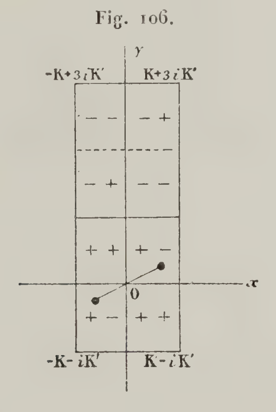
Lorsque z décrit l'axe des y positifs, dn$u$ varie de $+1$ à $+\infty$.

Le long des axes négatifs, $\operatorname{dn}u=\operatorname{dn}(-u)$ reprendra les mêmes valeurs que ci-dessus.

Lorsque z décrit un chemin rectiligne re^{ip}, $\sqrt{1-k^2z^2}$ décrira la même hyperbole équilatère que $\sqrt{1-z^2}$ et se déplacera suivant l'une ou l'autre des deux branches, suivant que $\sqrt{1-k^2z^2}$ partira de O avec le signe $+$ ou avec le signe $-$.

On verra, comme pour la fonction cn$u$, que la distribution des

Fig. 106.



signes des valeurs de dn$u$ dans chaque rectangle de dimensions 2K et 4K' est indiquée par la *fig.* 106.

Ici, dn$u$ parcourt deux fois la série complète de ses valeurs dans l'intérieur d'un rectangle de dimensions 2K et $4iK'$.

CHAPITRE IV.

DES FONCTIONS ELLIPTIQUES.

§ I.

RÉDUCTION DES INTÉGRALES ELLIPTIQUES AUX TROIS FORMES NORMALES.

1296. *Disparition des puissances impaires de x sous le radical dans les intégrales elliptiques.* — On donne le nom général d'*intégrales elliptiques* à une classe de transcendantes provenant de l'intégration des différentielles de la forme

$$f(x, \sqrt{X})\,dx,$$

f étant le symbole d'une fonction rationnelle, et

$$\sqrt{X} = \sqrt{Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E}$$

désignant la racine carrée d'un polynôme du quatrième ou du troisième degré, dans lequel on suppose que les coefficients A et B ne s'annulent pas à la fois et qu'il n'existe aucun diviseur carré de la forme $(x - a)^2$; autrement, le polynôme sous le radical pourrait s'abaisser au second ou au premier degré, ce qui ramènerait au cas traité dans le n° 427.

En raisonnant comme on l'a fait dans ce numéro, on voit facilement, quel que soit d'ailleurs le degré du polynôme sous le radical, que le calcul de l'intégrale

$$\int f(x, \sqrt{X})\,dx$$

peut se ramener immédiatement au calcul d'intégrales de fonc-

tions rationnelles et d'intégrales de l'une des quatre formes

$$\int \frac{dx}{\sqrt{X}}, \quad \int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{X}}, \quad \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{X}}, \quad \int \frac{dx}{(x-a)^n\sqrt{X}},$$

les exposants m et n étant entiers et positifs.

Occupons-nous, pour commencer, de la première de ces formes, qui est la plus simple, et cherchons à la transformer de manière à faire disparaître sous le radical les puissances impaires de la variable, comme nous l'avons fait au n° 428 pour le cas d'un polynôme du second degré.

1297. *Transformation du premier ordre.* — Nous nous proposerons d'abord, à l'aide d'une transformation rationnelle du premier ordre, de la forme

$$(1) \qquad x = \frac{p + qy}{p' + q'y},$$

de ramener l'intégrale $\int \frac{dx}{\sqrt{X}}$, où X est un polynôme du quatrième degré à coefficients réels, à une intégrale de la forme

$$\frac{1}{m}\int \frac{dy}{\sqrt{Y}},$$

où

$$\sqrt{Y} = \sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}$$

est la racine carrée d'un polynôme du quatrième degré ne contenant que des puissances paires de y, et cela de telle manière qu'aux valeurs réelles de l'une des variables x, y correspondent des valeurs réelles de l'autre. Nous verrons, de plus, que l'on peut toujours faire en sorte que k^2 soit une constante positive et moindre que l'unité.

Les deux différentielles $\frac{dx}{\sqrt{X}}$, $\frac{dy}{m\sqrt{Y}}$, étant égales entre elles pour tout système de valeurs correspondantes de x et de y, doivent devenir infinies en même temps. Or les valeurs de x qui rendent $\frac{1}{\sqrt{X}}$ infini sont les racines

$$a_1, \; a_2, \; a_3, \; a_4$$

de l'équation $X = 0$, et les infinis de $\frac{1}{\sqrt{Y}}$ sont de même

$$-\frac{1}{k}, \quad -1, \quad +1, \quad +\frac{1}{k}.$$

Supposons que ces deux séries de valeurs se correspondent dans l'ordre indiqué.

La différence $x - a_1$, devant s'évanouir en même temps que $y + \frac{1}{k}$ ou que $1 + ky$, aura, si la transformation est du premier ordre, une expression de la forme $b_1 \frac{1+ky}{1-ny}$, et de même pour les trois autres différences $x - a_2$, $x - a_3$, $x - a_4$; $1 - ny$ représentant, à un facteur constant près, le dénominateur de la formule de transformation (1). On pourra donc poser

$$(2) \quad \begin{cases} \dfrac{x-a_1}{b_1} = \dfrac{1+ky}{1-ny}, & \dfrac{x-a_4}{b_4} = \dfrac{1-ky}{1-ny}, \\[2ex] \dfrac{x-a_2}{b_2} = \dfrac{1+y}{1-ny}, & \dfrac{x-a_3}{b_3} = \dfrac{1-y}{1-ny}. \end{cases}$$

Si, dans les deux formules de la première ligne, on fait d'une part $x = a_4$, $y = +\frac{1}{k}$, de l'autre $x = a_1$, $y = -\frac{1}{k}$, et que, pour abréger, on pose généralement

$$(3) \qquad a_\mu - a_\lambda = a_{\lambda\mu}, \quad \text{d'où} \quad a_{\mu\lambda} = -a_{\lambda\mu},$$

l'élimination des constantes b_1, b_4 donnera les égalités

$$(4) \qquad \frac{x-a_1}{a_{14}} = \frac{k-n}{2k}\,\frac{1+ky}{1-ny}, \qquad \frac{x-a_4}{a_{41}} = \frac{k+n}{2k}\,\frac{1-ky}{1-ny}.$$

Les deux formules de la seconde ligne donneront de même

$$(5) \qquad \frac{x-a_2}{a_{23}} = \frac{1-n}{2}\,\frac{1+y}{1-ny}, \qquad \frac{x-a_3}{a_{32}} = \frac{1+n}{2}\,\frac{1-y}{1-ny}.$$

Des formules (5) on tire d'abord, par addition, à cause de $a_{32} = -a_{23}$,

$$(6) \qquad x = \frac{a_3+a_2}{2} + \frac{a_3-a_2}{2}\,\frac{y-n}{1-ny}.$$

On en tire ensuite, par division,

$$\frac{x-a_2}{a_3-x}=\frac{1-n}{1+n}\,\frac{1+y}{1-y}.$$

En faisant tour à tour, dans cette dernière équation,

1° $$x=a_1,\quad y=-\frac{1}{k},$$

2° $$x=a_4,\quad y=+\frac{1}{k},$$

on aura

$$\frac{a_{12}}{a_{13}}=\frac{1-n}{1+n}\,\frac{1-k}{1+k},\quad \frac{a_{24}}{a_{34}}=\frac{1-n}{1+n}\,\frac{1+k}{1-k}.$$

Ces deux égalités donnent, par multiplication et par division,

$$\left(\frac{1-k}{1+k}\right)^2=\frac{a_{12}a_{34}}{a_{13}a_{24}},\quad \left(\frac{1-n}{1+n}\right)^2=\frac{a_{12}a_{24}}{a_{13}a_{34}}.$$

En posant maintenant

(7) $$m'=\sqrt{a_{13}a_{24}},\quad m''=\sqrt{a_{12}a_{34}},$$

(8) $$n'=\sqrt{a_{13}a_{34}},\quad n''=\sqrt{a_{12}a_{24}},$$

on aura

$$\frac{1-k}{1+k}=\frac{m''}{m'},\quad \frac{1-n}{1+n}=\frac{n''}{n'},$$

d'où

(9) $$k=\frac{m'-m''}{m'+m''},\quad n=\frac{n'-n''}{n'+n''}.$$

Si l'on différentie l'une des formules (4), puis l'une des formules (5), on aura

$$\frac{dx}{a_{14}}=\frac{k^2-n^2}{2k}\,\frac{dy}{(1-ny)^2},\quad \frac{dx}{a_{23}}=\frac{1-n^2}{2}\,\frac{dy}{(1-ny)^2},$$

d'où, en multipliant membre à membre,

$$\frac{dx^2}{a_{14}a_{23}}=\frac{(1-n^2)(k^2-n^2)}{4k}\,\frac{dy^2}{(1-ny)^4}.$$

On a d'ailleurs

$$X = A(x - a_1)(x - a_2)(x - a_3)(x - a_4)$$
$$= A a_{14}^2 a_{28}^2 \frac{(1 - n^2)(k^2 - n^2)}{16 k^2} \frac{(1 - y^2)(1 - k^2 y^2)}{(1 - ny)^4}.$$

Des deux dernières équations on tire, par division,

$$(10) \qquad \frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{1}{m} \frac{dy}{\sqrt{Y}},$$

en posant

$$(11) \qquad m = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{A a_{14} a_{23}}{k}},$$

ou encore, en remarquant que l'on a identiquement

$$(12) \qquad m'^2 - m''^2 = a_{13} a_{24} - a_{12} a_{34} = a_{14} a_{23},$$

d'où

$$(13) \qquad k = \frac{m' - m''}{m' + m''} = \frac{m'^2 - m''^2}{(m' + m'')^2} = \frac{a_{14} a_{23}}{(m' + m'')^2},$$

$$(14) \qquad m = \sqrt{A} \frac{m' + m''}{2}.$$

On a enfin

$$1 - k^2 = k'^2 = \frac{4 m' m''}{(m' + m'')^2},$$

d'où

$$(15) \qquad k' = \frac{2\sqrt{m' m''}}{m' + m''}.$$

1298. Cherchons maintenant comment les formules que nous venons d'établir devront être modifiées suivant la nature des racines a_1, a_2, a_3, a_4 et suivant les valeurs attribuées à la variable x, de telle sorte que les formules de transformation aient une forme réelle pour les valeurs réelles de $\frac{dx}{\sqrt{X}}$, et que k^2 soit positif et moindre que l'unité.

Si nous supposons réels tous les coefficients du polynôme X, il pourra, relativement aux racines de ce polynôme, se présenter trois cas :

1° Les racines seront toutes réelles.

2° Deux seront réelles et les deux autres complexes.
3° Les quatre racines seront complexes.

Premier cas. — Les racines étant toutes réelles, supposons que l'on ait

$$a_1 < a_2 < a_3 < a_4.$$

Pour que le radical

$$\sqrt{X} = \sqrt{A(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)}$$

ait une valeur réelle, il faut, si A est positif, que x soit compris entre a_2 et a_3, ou qu'il soit ou $< a_1$ ou $> a_4$.

$$[\alpha] \qquad A > 0, \quad a_2 < x < a_3.$$

Dans ce cas, les formules du numéro précédent satisferont à toutes les conditions exigées.

$$[\beta] \qquad A > 0, \quad x < a_1 \text{ ou } > a_4.$$

Pour passer des formules du cas précédent à celles du cas actuel, on devra changer respectivement, dans les formules du n° **1296**,

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad a_4$$

en

$$a_3, \quad a_4, \quad a_1, \quad a_2,$$

et c'est à ces dernières valeurs de x que correspondront maintenant les valeurs de y

$$-\frac{1}{k}, \; -1, \; +1, \; +\frac{1}{k}.$$

Nous poserons, en conséquence,

$$\frac{x-a_1}{a_{14}} = \frac{1+n}{2}\,\frac{1-y}{1-ny}, \qquad \frac{x-a_4}{a_{41}} = \frac{1-n}{2}\,\frac{1-y}{1-ny},$$

$$\frac{x-a_2}{a_{23}} = \frac{k+n}{2}\,\frac{1-ky}{1-ny}, \qquad \frac{x-a_3}{a_{32}} = \frac{k-n}{2}\,\frac{1+ky}{1-ny},$$

et, en remarquant que, $x-a_1$ et $x-a_4$ devant être de même signe, ainsi que $1-y$ et $1+y$, tandis que a_{14} et a_{41} sont de

signes contraires, il en résulte que $1+n$ et $1-n$ doivent être aussi de signes contraires, on aura, au lieu des formules (6) à (9),

$$x = \frac{a_4+a_1}{2} + \frac{a_4-a_1}{2}\,\frac{n-y}{1-ny},$$

$$m' = \sqrt{a_{13}a_{24}}, \quad m'' = \sqrt{a_{12}a_{34}},$$

$$n' = \sqrt{a_{12}a_{13}}, \quad n'' = \sqrt{a_{24}a_{34}},$$

$$\frac{1-k}{1+k} = \frac{m''}{m'}, \quad \frac{n-1}{n+1} = \frac{n''}{n'},$$

$$k = \frac{m'-m''}{m'+m''}, \quad n = \frac{n'+n''}{n'-n''},$$

les formules (10) à (14) restant les mêmes.

$[\gamma]$ $\quad A<0, \quad a_1<x<a_2.$

On changera, dans les formules du n° 1297,

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad a_4$$

en

$$a_4, \quad a_1, \quad a_2, \quad a_3,$$

auxquels correspondront les valeurs de y

$$-\frac{1}{k}, \quad -1, \quad +1, \quad +\frac{1}{k}.$$

On aura alors

$$x = \frac{a_2+a_1}{2} + \frac{a_2-a_1}{2}\,\frac{y-n}{1-ny},$$

$$m' = \sqrt{a_{13}a_{24}}, \quad m'' = \sqrt{a_{14}a_{23}},$$

$$n' = \sqrt{a_{23}a_{24}}, \quad n'' = \sqrt{a_{13}a_{14}},$$

$$m = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{-A\,a_{12}a_{34}}{k}} = \sqrt{-A}\,\frac{m'+m''}{2},$$

les formules (9), (10), (14) restant les mêmes.

$[\delta]$ $\quad A<0, \quad a_3<x<a_4.$

On changera, dans les formules du n° 1297,

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad a_4$$

en

$$a_2, \quad a_3, \quad a_4, \quad a_1,$$

auxquels correspondront

$$-\frac{1}{k}, \; -1, \; +1, \; +\frac{1}{k}.$$

Alors

$$x = \frac{a_4 + a_3}{2} + \frac{a_4 - a_3}{2}\,\frac{y - n}{1 - ny},$$

$$m' = \sqrt{a_{13}a_{24}}, \quad m'' = \sqrt{a_{14}a_{23}},$$

$$n' = \sqrt{a_{14}a_{24}}, \quad n'' = \sqrt{a_{13}a_{23}},$$

les autres formules étant les mêmes qu'au numéro précédent.

1299. *Deuxième cas.* — Supposons maintenant que l'équation $X = 0$ ait deux racines réelles a_1, a_4, où

$$a_1 < a_4,$$

et deux racines complexes (conjuguées)

$$a_2 = g - ih, \quad a_3 = g + ih,$$

h étant positif. On aura à considérer les cas suivants :

$$[\varepsilon] \qquad A < 0, \quad a_1 < x < a_4.$$

Supposons qu'aux valeurs de x

$$a_2, \quad a_1, \quad a_4, \quad a_3$$

correspondent les valeurs de y

$$-\frac{1}{k}, \; -1, \; +1, \; +\frac{1}{k}.$$

On remplacera, dans les formules du n° 1296,

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad a_4$$

par

$$a_2, \quad a_1, \quad a_4, \quad a_3.$$

et l'on fera

$$\frac{x-a_1}{a_{14}}=\frac{1-n}{2}\,\frac{1+y}{1-ny},\qquad \frac{x-a_4}{a_{41}}=\frac{1+n}{2}\,\frac{1-y}{1-ny},$$
$$\frac{x-a_2}{a_{23}}=\frac{k-n}{2k}\,\frac{1+ky}{1-ny},\qquad \frac{x-a_3}{a_{32}}=\frac{k+n}{2k}\,\frac{1-ky}{1-ny},$$

d'où l'on tirera, comme au n° 1297,

$$\left(\frac{k-1}{k+1}\right)^2=\frac{a_{12}a_{34}}{a_{13}a_{24}},\qquad \left(\frac{1-n}{1+n}\right)^2=\frac{a_{12}a_{13}}{a_{24}a_{34}}.$$

Si l'on pose maintenant

$$a_{24}=\gamma' e^{i\theta'},\qquad a_{12}=\gamma'' e^{-i\theta''},$$
$$a_{34}=\gamma' e^{-i\theta'},\qquad a_{13}=\gamma'' e^{i\theta''},$$
$$\sqrt{\gamma'\gamma''}=\gamma,\qquad \frac{\theta'+\theta''}{2}=\theta,$$
$$m'=\sqrt{a_{13}a_{24}}=\gamma e^{i\theta},\qquad m''=\sqrt{a_{12}a_{34}}=\gamma e^{-i\theta},$$
$$n'=\sqrt{a_{24}a_{34}}=\gamma',\qquad n''=\sqrt{a_{12}a_{13}}=\gamma'',$$

on en tirera

$$k=\frac{m'+m''}{m'-m''}=\frac{1}{i\tang\theta},\qquad n=\frac{n'-n''}{n'+n''}=\frac{\gamma'-\gamma''}{\gamma'+\gamma''}.$$

Il vient ensuite

$$x=\frac{a_4+a_1}{2}+\frac{a_4-a_1}{2}\,\frac{y-n}{1-ny},$$
$$\frac{dx^2}{a_{14}a_{23}}=\frac{(1-n^2)(k^2-n^2)}{4k}\,\frac{dy^2}{(1-ny)^4},$$
$$\mathrm{X}=\mathrm{A}(a_{14}a_{23})^2\,\frac{(1-n^2)(k^2-n^2)}{16k^2}\,\frac{(1-y^2)(1-k^2y^2)}{(1-ny)^4},$$

d'où

$$\frac{dx^2}{\mathrm{X}}=\frac{4k}{\mathrm{A}a_{14}a_{23}}\,\frac{dy^2}{(1-y^2)(1-k^2y^2)}.$$

A cause de l'identité (12)

$$a_{14}a_{23}=a_{13}a_{24}-a_{12}a_{34}=m'^2-m''^2=2i\gamma^2\sin 2\theta,$$

il vient

$$\frac{4k}{\mathrm{A}a_{14}a_{23}}=-\frac{1}{-\mathrm{A}\gamma^2\sin^2\theta}.$$

Donc

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{1}{\sqrt{-A}.\gamma \sin\theta} \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}.$$

Pour ramener la différentielle du second membre à une différentielle de même forme dans laquelle la quantité analogue à k^2 soit positive et < 1, posons

$$y = -\sqrt{1-z^2},$$

d'où

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} = \frac{dz}{\sqrt{1-k^2}\sqrt{(1-z^2)(1-\varkappa^2 z^2)}},$$

en faisant

$$\varkappa^2 = \frac{-k^2}{1-k^2} = \cos^2\theta.$$

On aura donc

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{1}{\gamma\sqrt{-A}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-\varkappa^2 z^2)}}.$$

La transformation revient ainsi à poser

$$z = \sin\varphi, \quad \text{d'où} \quad y = -\cos\varphi,$$

$$x = \frac{a_4+a_1}{2} - \frac{a_4-a_1}{2}\frac{n+\cos\varphi}{1+n\cos\varphi},$$

ce qui donne

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{1}{\gamma\sqrt{-A}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\varphi}}.$$

[ζ] $\quad A > 0, \quad x < a_1$ ou $> a_4$.

On remplacera, dans les formules du n° 1297,

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad a_4$$

par

$$a_3, \quad a_4, \quad a_1, \quad a_2,$$

correspondant aux valeurs de y

$$-\frac{1}{k}, \quad -1, \quad +1, \quad +\frac{1}{k}.$$

Les expressions de m', m'', n', n'' restant les mêmes que dans le

cas précédent (ε), on aura

$$k = \frac{m' - m''}{m' + m''} = i \tan \theta, \quad n = \frac{\gamma'' - \gamma'}{\gamma'' + \gamma'},$$

$$\frac{dx^2}{X} = \frac{4k}{A a_{14} a_{23}} \frac{dy^2}{(1 - y^2)(1 - k^2 y^2)}.$$

En remarquant que l'on a

$$\frac{4k}{A a_{14} a_{23}} = \frac{1}{A \gamma^2 \cos^2 \theta},$$

il viendra

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{1}{\sqrt{A} \cdot \gamma \cos \theta} \frac{dy}{\sqrt{(1 - y^2)(1 - k^2 y^2)}}.$$

Si l'on fait maintenant

$$y = -\sqrt{1 - z^2}, \quad \varkappa^2 = \frac{-k^2}{1 - k^2} = \sin^2 \theta,$$

on en tirera

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{1}{\gamma \sqrt{A}} \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}}.$$

La transformation revient ainsi, pour $z = \sin \varphi$, à poser

$$x = \frac{a_4 + a_1}{2} + \frac{a_4 - a_1}{2} \frac{n + \cos \varphi}{1 + n \cos \varphi},$$

ce qui donne

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{1}{\gamma \sqrt{A}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2 \varphi}}.$$

1300. *Troisième cas.* — Les quatre racines a_1, a_2, a_3, a_4 sont complexes, et A est nécessairement positif. Posons

$$a_1 = g_1 - ih_1, \quad a_4 = g_1 + ih_1,$$
$$a_2 = g_2 - ih_2, \quad a_3 = g_2 + ih_2,$$

et soit, comme au n° 1296,

$$\frac{x - a_1}{a_{14}} = \frac{k - n}{2k} \frac{1 + ky}{1 - ny}, \quad \frac{x - a_4}{a_{41}} = \frac{k + n}{2k} \frac{1 - ky}{1 - ny},$$

$$\frac{x - a_2}{a_{23}} = \frac{1 - n}{2} \frac{1 + y}{1 - ny}, \quad \frac{x - a_3}{a_{32}} = \frac{1 + n}{2} \frac{1 - y}{1 - ny}.$$

On en déduira, comme précédemment,

$$\left(\frac{1-k}{1+k}\right)^2 = \frac{a_{12}a_{34}}{a_{13}a_{24}}, \quad \left(\frac{1-n}{1+n}\right)^2 = \frac{a_{12}a_{24}}{a_{13}a_{34}},$$

et, en posant

$$a_{42} = \gamma' e^{-i\theta'}, \quad a_{12} = \gamma'' e^{-i\theta''},$$
$$a_{13} = \gamma' e^{i\theta'}, \quad a_{43} = \gamma'' e^{i\theta''},$$
$$\sqrt{\gamma'\gamma''} = \gamma, \quad \frac{\theta'+\theta''}{2} = \theta,$$
$$m' = i\gamma', \quad m'' = i\gamma'''$$
$$n' = \sqrt{a_{13}a_{34}} = i\gamma e^{i\theta}, \quad n'' = \sqrt{a_{12}a_{24}} = i\gamma e^{-i\theta},$$

il viendra

$$k = \frac{\gamma'-\gamma''}{\gamma'+\gamma''}, \quad n = \frac{n'-n''}{n'+n''} = i \operatorname{tang}\theta.$$

On a ensuite

$$x = \frac{a_3+a_2}{2} + \frac{a_3-a_2}{2}\,\frac{y-n}{1-ny},$$
$$\frac{dx^2}{a_{14}a_{23}} = \frac{\text{séc}^2\theta\,(k^2+\operatorname{tang}^2\theta)}{4k}\,\frac{dy^2}{(1-ny)^4},$$
$$X = A\,\frac{\text{séc}^2\theta\,(k^2+\operatorname{tang}^2\theta)}{16k^2}\,\frac{(1-y^2)(1-k^2y^2)}{(1-ny)^4},$$

d'où, en faisant

$$iy = z$$

et remarquant que $a_{14}a_{23} = -4h_1h_2$,

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} = \sqrt{\frac{k}{Ah_1h_2}}\,\frac{i\,dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} = \sqrt{\frac{k}{Ah_1h_2}}\,\frac{dz}{\sqrt{(1+z^2)(1+k^2z^2)}}.$$

Soit maintenant

$$z = \operatorname{tang}\varphi, \quad \text{d'où} \quad dz = \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}, \quad 1+z^2 = \frac{1}{\cos^2\varphi};$$

les formules de transformation deviendront

$$x = g_2 - h_2\,\frac{\operatorname{tang}\varphi - \operatorname{tang}\theta}{1+\operatorname{tang}\varphi\operatorname{tang}\theta} = g_2 - h_2\operatorname{tang}(\varphi-\theta),$$
$$\frac{dx}{\sqrt{X}} = \sqrt{\frac{k}{Ah_1h_2}}\,\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos^2\varphi+k^2\sin^2\varphi}} = \sqrt{\frac{k}{Ah_1h_2}}\,\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\varphi}},$$

où

$$k' = \sqrt{1 - k^2} = \frac{2\sqrt{\gamma'\gamma''}}{\gamma' + \gamma''}.$$

1301. Si maintenant X est un polynôme du troisième degré, on pourra le considérer comme la limite du polynôme

$$\begin{aligned} X &= A(a_1 - x)(a_2 - x)(a_3 - x)(a_4 - x) \\ &= A a_4 (a_1 - x)(a_2 - x)(a_3 - x)\left(1 - \frac{x}{a_4}\right), \end{aligned}$$

dans lequel on aura remplacé $A a_4$ par A, puis fait tendre a_4 vers l'infini.

Premier cas. — Supposons les racines a_1, a_2, a_3 réelles et

$$a_1 < a_2 < a_3.$$

$$[\alpha] \qquad A > 0, \quad a_2 < x < a_3.$$

On prendra les formules du n° 1297, en y faisant $a_4 = \infty$, ce qui donne

$$\frac{1-k}{1+k} = \sqrt{\frac{a_{12}}{a_{13}}}, \quad \frac{1-n}{1+n} = \sqrt{\frac{a_{12}}{a_{23}}},$$

$$m' = \sqrt{a_{13}}, \qquad m'' = \sqrt{a_{12}},$$

$$n' = \sqrt{a_{13}}, \qquad n'' = \sqrt{a_{12}},$$

$$k = n = \frac{\sqrt{a_{13}} - \sqrt{a_{12}}}{\sqrt{a_{13}} + \sqrt{a_{12}}},$$

$$x = \frac{a_3 + a_2}{2} + \frac{a_3 - a_2}{2}\,\frac{y - k}{1 - ky},$$

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{1}{m}\frac{dy}{\sqrt{Y}}, \quad m = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{A a_{23}}{k}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{A}\,.(m' + m'').$$

$$[\beta] \qquad A > 0, \quad -\infty \ldots x \ldots a_1.$$

En faisant $a_4 = \infty$ dans les formules (β) du n° 1298, on a

$$\frac{1-k}{1+k} = \sqrt{\frac{a_{12}}{a_{13}}}, \quad \frac{n-1}{n+1} = \sqrt{\frac{a_{24}a_{34}}{a_{12}a_{13}}} = \infty,$$

d'où

$$k = \frac{\sqrt{a_{13}} - \sqrt{a_{12}}}{\sqrt{a_{13}} + \sqrt{a_{12}}}, \quad n = -1,$$

$$x = a_1 - \sqrt{a_{12}a_{13}}\,\frac{1-y}{1+y},$$

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{1}{m}\frac{dy}{\sqrt{Y}}, \quad m = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{A a_{23}}{k}}.$$

$[\gamma]$ $\quad A < 0, \quad a_1 < x < a_2.$

On trouve

$$\frac{1-k}{1+k} = \sqrt{\frac{a_{23}}{a_{13}}} = \frac{1+n}{1-n},$$

d'où

$$k = -n = \frac{\sqrt{a_{13}} - \sqrt{a_{23}}}{\sqrt{a_{13}} + \sqrt{a_{23}}},$$

$$x = \frac{a_2 + a_1}{2} + \frac{a_2 - a_1}{2}\,\frac{y+k}{1+ky},$$

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{1}{m}\frac{dy}{\sqrt{Y}}, \quad m = \tfrac{1}{2}\sqrt{-A}\left(\sqrt{a_{13}} + \sqrt{a_{23}}\right).$$

$[\delta]$ $\quad A < 0, \quad a_3 < x < +\infty.$

On aura alors

$$\frac{1-k}{1+k} = \sqrt{\frac{a_{23}}{a_{13}}}, \quad n = 1,$$

$$x = a_3 + \sqrt{a_{12}a_{23}}\,\frac{1+y}{1-y},$$

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{1}{m}\frac{dy}{\sqrt{Y}}, \quad m = \tfrac{1}{2}\sqrt{-A}\left(\sqrt{a_{13}} + \sqrt{a_{23}}\right).$$

Deuxième cas. — La racine a_1 est réelle; a_2 et a_3 sont complexes :

$$a_2 = g - ih, \quad a_3 = g + ih.$$

$[\varepsilon]$ $\quad A < 0, \quad a_1 < x < +\infty.$

En opérant comme au n° **1299**, on trouvera

$$\left(\frac{k-1}{k+1}\right)^2 = \frac{a_{12}}{a_{13}}, \quad n = 1,$$

d'où, en posant $a_{12} = \gamma e^{-2i\theta}$, $a_{13} = \gamma e^{2i\theta}$, il vient

$$k = \frac{1}{i \operatorname{tang} \theta}.$$

On a ensuite

$$x = a_1 + \sqrt{a_{12} a_{13}} \, \frac{1+y}{1-y} = a_1 + \gamma \, \frac{1+y}{1-y},$$

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{1}{m} \frac{dy}{\sqrt{Y}}, \quad m = \sqrt{-A\gamma} . \sin\theta.$$

En posant

$$y = -\sqrt{1 - z^2}, \quad \varkappa = \cos\theta,$$

on aura

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{1}{\sqrt{-A\gamma}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-\varkappa^2 z^2)}}.$$

Donc, en faisant

$$z = \sin\varphi, \quad \text{d'où} \quad x = a_1 + \gamma \, \frac{1 - \cos\varphi}{1 + \cos\varphi},$$

on en tirera

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{1}{\sqrt{-A\gamma}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2\varphi}}.$$

$$[\zeta] \qquad A > 0, \quad -\infty < x < a_1.$$

On trouvera de même

$$\left(\frac{k-1}{k+1}\right)^2 = \frac{a_{12}}{a_{13}}, \quad n = -1,$$

d'où

$$x = a_1 - \gamma \, \frac{1-y}{1+y},$$

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{1}{m} \frac{dy}{\sqrt{Y}}, \quad m = \sqrt{A\gamma} \sin\theta,$$

ou, en posant $y = -\cos\varphi$, $\varkappa = \cos\theta$,

$$x = a_1 - \gamma \, \frac{1 + \cos\varphi}{1 - \cos\varphi}, \quad \frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{1}{\sqrt{A\gamma}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2\varphi}}.$$

1302. *Transformation du second ordre.* — Dans le cas où les quatre racines a_1, a_2, a_3, a_4 sont réelles, on peut obtenir des for-

mules un peu plus simples en employant la transformation du second ordre, qui consiste à établir une relation du premier degré entre x et le carré

$$s = y^2$$

de la variable y qui doit remplacer x.

Si l'on pose $y^2 = s$, la différentielle

$$\frac{dy}{\sqrt{Y}} = \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}$$

prend la forme

$$\frac{ds}{\sqrt{S}} = \frac{ds}{\sqrt{s(1-s)(1-k^2s)}}.$$

Cherchons à ramener la différentielle $\frac{dx}{\sqrt{X}}$ à la forme

$$\frac{1}{m}\frac{ds}{\sqrt{S}},$$

en établissant une relation rationnelle du premier degré entre x et $s = y^2 = \sin^2\varphi$.

Supposons d'abord le polynôme X du quatrième degré.

$$[1] \qquad A < 0, \quad a_1 < x < a_2.$$

Aux valeurs

$$x = a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad a_4,$$

qui rendent $\frac{1}{X}$ infini, faisons correspondre les valeurs

$$s = 0, \quad 1, \quad \frac{1}{k}, \quad \infty.$$

On pourra poser alors

$$\frac{s}{b_1} = \frac{x-a_1}{x-a_4}, \quad \frac{1-s}{b_2} = \frac{x-a_2}{x-a_4}, \quad \frac{1-k^2s}{b_3} = \frac{x-a_3}{x-a_4},$$

d'où, en faisant $s = 1$, puis $s = 0$, on a

$$\frac{1}{b_1} = \frac{a_{12}}{a_{42}}, \quad \frac{1}{b_2} = \frac{a_{21}}{a_{41}}, \quad \frac{1}{b_3} = \frac{a_{31}}{a_{41}},$$

et par suite

$$s = \frac{a_{42}}{a_{12}} \frac{x - a_1}{x - a_4}, \quad 1 - s = \frac{a_{41}}{a_{21}} \frac{x - a_2}{x - a_4}, \quad 1 - k^2 s = \frac{a_{41}}{a_{31}} \frac{x - a_3}{x - a_4}.$$

La dernière de ces équations donne, en faisant $s = 1$, $x = a_2$,

$$1 - k^2 = k'^2 = \frac{a_{41}}{a_{31}} \frac{a_{32}}{a_{42}} = \frac{a_{14} a_{23}}{a_{13} a_{24}},$$

d'où, en vertu de l'identité $a_{13} a_{24} - a_{14} a_{23} = a_{12} a_{34}$,

$$k^2 = \frac{a_{12} a_{34}}{a_{13} a_{24}},$$

quantité évidemment positive et < 1 si l'on suppose

$$a_1 < a_2 < a_3 < a_4,$$

et par suite x et s croissant dans le même sens. On a alors

$$x = \frac{a_1 a_{24} + a_4 a_{12} s}{a_{24} + a_{12} s},$$

puis

$$dx = \frac{a_{12} (x - a_4)^2}{a_{14} a_{24}} ds.$$

Donc

$$\begin{aligned} S &= \frac{a_{42}}{a_{12}} \frac{x - a_1}{x - a_4} \cdot \frac{a_{41}}{a_{21}} \frac{x - a_2}{x - a_4} \cdot \frac{a_{41}}{a_{31}} \frac{x - a_1}{x - a_4} \\ &= \frac{a_{14}^2 a_{24}}{a_{12}^2 a_{31}} \frac{(x - a_1)(x - a_2)(x - a_3)}{(x - a_4)^3} \\ &= \frac{a_{14}^2 a_{24}}{a_{12}^2 a_{13}} \cdot \frac{X}{-A (x - a_4)^4}, \end{aligned}$$

et par suite

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{1}{\sqrt{-A a_{13} a_{24}}} \frac{ds}{\sqrt{S}}.$$

La différentielle $\dfrac{dx}{\sqrt{X}}$ sera donc ramenée à la forme

$$\frac{1}{m} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$$

si l'on pose

$$x = \frac{a_1 a_{24} + a_4 a_{12} \sin^2 \varphi}{a_{24} + a_{12} \sin^2 \varphi}, \quad m = \sqrt{-A a_{13} a_{24}},$$

$$[\text{II}] \qquad A < 0, \quad a_3 < x < a_4.$$

Pour que la transformation soit réelle, il faut qu'aux valeurs de x comprises entre a_3 et a_4 correspondent des valeurs réelles de φ, et par suite que $s = \sin^2\varphi$ soit compris entre o et $+1$. Il faut donc qu'à

$$x = a_3, \ a_4, \ a_1, \ a_2$$

on fasse correspondre

$$s = 0, \quad 1, \quad \frac{1}{k}, \ \infty.$$

On devra donc changer, dans les formules précédentes, les indices

$$1, \ 2, \ 3, \ 4$$

en

$$3, \ 4, \ 1, \ 2,$$

ce qui donne les mêmes valeurs de k^2, k'^2, m que précédemment, avec la valeur

$$x = \frac{a_3 a_{24} - a_2 a_{34} s}{a_{24} - a_{34} s} = \frac{a_3 a_{24} - a_2 a_{34} \sin^2\varphi}{a_{24} - a_{34} \sin^2\varphi}.$$

$$[\text{III}] \qquad A = 0, \quad x < a_1 \text{ ou } > a_4.$$

Il faudra changer, dans les formules [I], les indices

$$1, \ 2, \ 3, \ 4$$

en

$$4, \ 1, \ 2, \ 3,$$

d'où

$$k^2 = \frac{a_{14} a_{23}}{a_{13} a_{24}}, \quad k'^2 = \frac{a_{12} a_{34}}{a_{13} a_{24}},$$

$$x = \frac{a_4 a_{13} - a_3 a_{14} \sin^2\varphi}{a_{13} - a_{14} \sin^2\varphi}, \quad m = \sqrt{A\, a_{13} a_{24}}.$$

$$[\text{IV}] \qquad A > 0, \quad a_2 < x < a_3.$$

On changera les indices

$$1, \ 2, \ 3, \ 4$$

de [I] en

$$2,\ 3,\ 4,\ 1,$$

ce qui donnera pour k^2, k'^2, m les mêmes valeurs que dans [III], avec

$$x = \frac{a_2 a_{13} - a_1 a_{23} \sin^2\varphi}{a_{13} - a_{23}\sin^2\varphi}.$$

1303. Dans le cas où X est du troisième degré et égal à

$$A(a_1 - x)(a_2 - x)(a_3 - x),$$

il suffira de faire dans les formules précédentes les mêmes changements que pour passer des formules du n° 1296 à celles du n° 1300, ce qui donnera les formules suivantes :

$$[\mathrm{I}] \qquad A < 0, \quad a_1 < x < a_2.$$

$$k^2 = \frac{a_{12}}{a_{13}}, \quad k'^2 = \frac{a_{23}}{a_{13}}, \quad m = \sqrt{-A a_{13}},$$

$$x = a_1 + a_{12}\sin^2\varphi.$$

$$[\mathrm{II}] \qquad A < 0, \quad a_3 < x < +\infty.$$

Mêmes valeurs de k^2, k'^2, m que pour [I];

$$x = \frac{a_3 - a_2\sin^2\varphi}{1 - \sin^2\varphi}.$$

$$[\mathrm{III}] \qquad A > 0, \quad -\infty < x < a_1.$$

$$k^2 = \frac{a_{23}}{a_{13}}, \quad k'^2 = \frac{a_{12}}{a_{13}}, \quad m = \sqrt{A a_{13}},$$

$$x = a_3 - \frac{a_{13}}{\sin^2\varphi}.$$

$$[\mathrm{IV}] \qquad A > 0, \quad a_2 < x < \alpha_3.$$

Mêmes valeurs de k^2, k'^2, m que pour [III];

$$x = \frac{a_2 a_{13} - a_1 a_{23}\sin^2\varphi}{a_{13} - a_{23}\sin^2\varphi}.$$

1304. *Réduction de l'intégrale $\int F(x, \sqrt{X})\,dx$ aux trois formes normales.* — On commencera, en opérant comme au nº 427, par mettre l'expression différentielle $F(x, \sqrt{X})\,dx$ sous la forme

$$\left[\varphi_1(x) + \frac{\varphi_2(x)}{\sqrt{X}}\right]dx,$$

$\varphi_1(x)$ et $\varphi_2(x)$ étant des fonctions rationnelles de x. Nous n'aurons à nous occuper que de la partie $\dfrac{\varphi_2(x)}{\sqrt{X}}\,dx$.

Si la transformation du second ordre est applicable [1302], elle ramènera immédiatement cette différentielle à la forme

$$f(\sin^2\varphi)\frac{d\varphi}{\Delta\varphi},$$

f étant le signe d'une fonction rationnelle, et $\Delta\varphi$ désignant le radical $\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}$.

La transformation du premier ordre ramènera la même expression à la forme

$$\chi(y)\frac{d\varphi}{\Delta\varphi},$$

y représentant une des trois quantités $\sin\varphi$, $\cos\varphi$, $\operatorname{tang}\varphi$. La fonction rationnelle $\chi(y)$ pourra se mettre successivement sous les diverses formes

$$\chi(y) = \frac{\chi_1(y)}{\chi_2(y)} = \frac{\Psi_1(y^2) + y\Psi_2(y^2)}{\psi_1(y^2) + y\psi_2(y^2)} = \frac{\omega_1(y^2) + y\omega_2(y^2)}{[\psi_1(y^2)]^2 - y^2[\psi_2(y^2)]^2},$$

χ_1, χ_2, Ψ_1, ... désignant des fonctions rationnelles et entières. La fonction se trouve ainsi décomposée en une fonction paire de y et une fonction impaire de la forme $y\varpi(y^2)$.

Cette dernière fonction, étant multipliée par $\dfrac{d\varphi}{\Delta\varphi}$, donnera une différentielle qui s'intégrera par arcs de cercle et par logarithmes

[427 et suiv.], en posant,

$$\text{pour } y=\sin\varphi, \quad z=\cos\varphi, \quad \text{d'où} \quad \varpi(y^2)\frac{y\,d\varphi}{\Delta\varphi}=-\Pi(z^2)\frac{dz}{\sqrt{k'^2+k^2z^2}},$$

$$\text{pour } y=\cos\varphi, \quad z=\sin\varphi, \quad \text{d'où} \quad \varpi(y^2)\frac{y\,d\varphi}{\Delta\varphi}=\Pi(z^2)\frac{dz}{\sqrt{1-k^2z^2}},$$

$$\text{pour } y=\operatorname{tang}\varphi, \quad z=\cos\varphi, \quad \text{d'où} \quad \varpi(y^2)\frac{y\,d\varphi}{\Delta\varphi}=-\Pi\left(\frac{1-z^2}{z^2}\right)\frac{dz}{z\sqrt{k'^2+k^2z^2}},$$

Π désignant une fonction rationnelle.

La fonction paire de y peut, dans les trois cas, se mettre sous la forme d'une fonction rationnelle de $\sin^2\varphi$. On est donc toujours ramené à une différentielle de la forme

$$f(\sin^2\varphi)\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}.$$

Par la décomposition en fractions simples, cette fonction produira des termes compris dans les quatre formes suivantes,

$$\frac{A\,d\varphi}{\Delta\varphi}, \quad \frac{A\,d\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)\Delta\varphi}, \quad \frac{A\sin^{2p}\varphi\,d\varphi}{\Delta\varphi}, \quad \frac{A\,d\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)^q\Delta\varphi},$$

A, n étant des constantes quelconques, et p, q des exposants entiers qne nous pourrons ramener à l'unité.

1305. I. Considérons l'intégrale

$$V_q=\int\frac{d\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)^q\Delta\varphi}.$$

Si l'on différentie l'expression

$$\frac{\sin\varphi\cos\varphi\,\Delta\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)^{q-1}},$$

en posant, pour un instant,

$$1+n\sin^2\varphi=\Phi, \quad q-1=r,$$

la dérivée de cette expression sera

$$\frac{1}{\Phi^{r+1}\Delta\varphi}\left\{\Phi\left[(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)\Delta^2\varphi-k^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi\right]-2rn\sin^2\varphi\cos^2\varphi\,\Delta^2\varphi\right\}.$$

En ordonnant suivant les puissances de

$$t = \frac{1 - \Phi}{n} = -\sin^2\varphi,$$

la quantité entre parenthèses devient, après quelques réductions faciles,

$$2r\left(1 + \frac{1+k^2}{n} + \frac{k^2}{n^2}\right) - (2r-1)\left(1 + \frac{2+2k^2}{n} + \frac{3k^2}{n^2}\right)\Phi$$
$$+ (2r-2)\left(\frac{1+k^2}{n} + \frac{3k^2}{n^2}\right)\Phi^2 - (2r-3)\frac{k^2}{n^2}\Phi^3.$$

Si l'on multiplie maintenant par $\frac{d\varphi}{\Phi^{r+1}\Delta\varphi}$, on aura, en intégrant et rétablissant les notations primitives, la formule de réduction

$$(2q-2)\left(1 + \frac{1+k^2}{n} + \frac{k^2}{n^2}\right)V_q - (2q-3)\left(1 + \frac{2+2k^2}{n} + \frac{3k^2}{n^2}\right)V_{q-1}$$
$$+ (2q-4)\left(\frac{1+k^2}{n} + \frac{3k^2}{n^2}\right)V_{q-2} - (2q-5)\frac{k^2}{n^2}V_{q-3}$$
$$= \frac{\sin\varphi\cos\varphi\,\Delta\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)^{q-1}}.$$

Cette formule permettra d'abaisser l'indice q de V_q tant que cet indice sera supérieur à l'unité. Alors les intégrales $V_q, V_{q-1}, \ldots, V_2$ se trouveront exprimées au moyen de fonctions rationnelles de $\sin\varphi$, $\cos\varphi$, $\Delta\varphi$, et au moyen des intégrales

$$V_1 = \int \frac{d\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)\Delta\varphi},$$

$$V_0 = \int \frac{d\varphi}{\Delta\varphi},$$

$$V_{-1} = \int \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} + n\int \frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{\Delta\varphi},$$

dont la première forme une transcendante spéciale, tandis que les deux autres appartiennent à des classes de transcendantes plus simples.

1306. La formule de réduction que nous venons d'établir se simplifie :

1° Dans le cas où l'on a

$$n = -1, \quad V_q = \int \frac{d\varphi}{\cos^{2q}\varphi\,\Delta\varphi},$$

ce qui donne, en changeant q en $q+1$,

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} &(2q-1)k'^2\,V_q + (2q-2)(2k^2-1)V_{q-1} \\ &\qquad\qquad - (2q-3)k^2\,V_{q-2} = \frac{\sin\varphi\,\Delta\varphi}{\cos^{2q-1}\varphi}, \end{aligned} \right.$$

formule qui permet d'exprimer $V_q, V_{q-1}, \ldots, V_1$ au moyen des deux intégrales

$$V_0 = \int \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}, \quad V_{-1} = \int \frac{\cos^2\varphi\,d\varphi}{\Delta\varphi}$$

et de fonctions rationnelles de $\sin\varphi$, $\cos\varphi$, $\Delta\varphi$.

2° Dans le cas où l'on a

$$n = -k^2, \quad V_q = \int \frac{d\varphi}{\Delta^{2q+1}\varphi},$$

ce qui donne la formule

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} &-(2q-1)\frac{k'^2}{k^2}\,V_q + (2q-2)\frac{2-k^2}{k^2}\,V_{q-1} \\ &\qquad\qquad - (2q-3)\frac{1}{k^2}\,V_{q-2} = \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta^{2q-1}\varphi}, \end{aligned} \right.$$

en vertu de laquelle on exprimera $V_q, V_{q-1}, \ldots, V_1$ au moyen des deux intégrales V_0, V_{-1} et de fonctions rationnelles de $\sin\varphi$, $\cos\varphi$, $\Delta\varphi$.

1307. II. En différentiant de même l'expression

$$\sin^{2p-3}\varphi\cos\varphi\,\Delta\varphi$$

et intégrant de nouveau, on aura, pour l'intégrale

$$U_p = \int \frac{\sin^{2p}\varphi\,d\varphi}{\Delta\varphi},$$

la formule de réduction

$$\begin{aligned} &(2p-1)k^2 U_p - (2p-2)(1+k^2)U_{p-1} + (2p-3)U_{p-2} \\ &= \sin^{2p-3}\varphi\cos\varphi\,\Delta\varphi, \end{aligned}$$

qui permettra d'abaisser l'exposant p jusqu'à la valeur 1 lorsqu'il est positif.

Si p est négatif et $= -q$, on aura, en changeant q en $q-2$, la formule de réduction de l'intégrale

$$W_q = \int \frac{d\varphi}{\sin^{2q}\varphi\,\Delta\varphi},$$

savoir

$$-(2q-1)W_q + (2q-2)(1+k^2)W_{q-1} - (2q-3)k^2 W_{q-2} = \frac{\cos\varphi\,\Delta\varphi}{\sin^{2q-1}\varphi}.$$

1308. Il est aisé de voir que les deux intégrales

$$\int \sin^2\varphi\,\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}, \quad \int \cos^2\varphi\,\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}$$

s'expriment immédiatement au moyen des deux intégrales

$$\int \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} \quad \text{et} \quad \int \Delta\varphi\,d\varphi = \int (1 - k^2\sin^2\varphi)\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}.$$

On a, en effet,

$$\int_0^\varphi \frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{\Delta\varphi} = \frac{1}{k^2}\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} - \frac{1}{k^2}\int_0^\varphi \Delta\varphi\,d\varphi,$$

$$\int_0^\varphi \frac{\cos^2\varphi\,d\varphi}{\Delta\varphi} = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} - \int_0^\varphi \frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{\Delta\varphi} = \frac{k'^2}{k^2}\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} + \frac{1}{k^2}\int_0^\varphi \Delta\varphi\,d\varphi.$$

Donc, dans tous les cas possibles, l'intégrale $\int F(x, \sqrt{X})\,dx$ pourra s'exprimer au moyen des fonctions algébriques, logarithmiques et circulaires, et des trois transcendantes

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}, \quad \int_0^\varphi \Delta\varphi\,d\varphi, \quad \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)\Delta\varphi},$$

auxquelles on a donné les noms d'*intégrales elliptiques de première, de deuxième* et *de troisième espèce.*

L'intégrale de première espèce, que Legendre a représentée par le symbole

$$F(\varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta\varphi},$$

dépend à la fois de sa limite supérieure φ, qu'on appelle l'*amplitude*, et de la constante k, qui est dite le *module*. Nous nous dispenserons d'écrire le module toutes les fois qu'il sera désigné par la lettre k; s'il est représenté par un autre signe, par la lettre l par exemple, nous le mettrons en évidence, en écrivant

$$F(\varphi, l) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi, l)}.$$

La même convention s'appliquera aux autres intégrales elliptiques et généralement à toutes les fonctions de l'argument et du module.

L'intégrale de deuxième espèce est désignée, suivant la notation de Legendre, par

$$E(\varphi) = \int_0^\varphi \Delta\varphi \, d\varphi,$$

expression qui représente la longueur de l'arc d'ellipse [746, I].

Enfin l'intégrale de troisième espèce est représentée par le symbole

$$\Pi(\varphi, n) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1 + n\sin^2\varphi)\Delta\varphi}.$$

Elle dépend de trois quantités : l'amplitude φ, le module k et le *paramètre* n.

Depuis les travaux d'Abel et de Jacobi, on rapporte généralement toutes les fonctions elliptiques à l'intégrale de première espèce, considérée comme variable indépendante. En posant

$$u = F(\varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta\varphi},$$

nous avons vu que les quantités φ, $\sin\varphi$, ... sont représentées, en fonction de u, par les notations $\operatorname{am} u$, $\operatorname{sn} u$, ...

A cause de $d\varphi = \operatorname{dn} u \, du$, l'intégrale de deuxième espèce peut se mettre sous la forme

$$\int_0^\varphi \Delta\varphi \, d\varphi = \int_0^u \operatorname{dn}^2 u \, du,$$

en la considérant comme une fonction de u. Pour éviter toute confusion avec la notation de Legendre, nous la représenterons, avec

Gudermann, par

$$\text{el}\,u.$$

Enfin l'intégrale de troisième espèce peut se mettre sous la forme

$$\int_0^u \frac{du}{1+n\,\text{sn}^2 u}.$$

§ II.

PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS ELLIPTIQUES.

1309. Nous avons vu dans le Chapitre précédent que, si l'on pose

$$u = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

l'angle $\varphi = \arcsin z$ est dit l'*amplitude* de la variable u,

$$\varphi = \text{am}\,u,$$

et que les diverses *fonctions circulaires* de cette amplitude,

$$\sin\varphi,\quad \cos\varphi,\quad \Delta\varphi,\quad \text{tang}\,\varphi,$$

sont dites les *fonctions elliptiques* de la variable u,

$$\text{sn}\,u,\quad \text{cn}\,u,\quad \text{dn}\,u,\quad \text{tn}\,u.$$

Ces notations supposent que le *module* de ces fonctions soit la quantité désignée par la lettre k. Si le module était représenté par une autre lettre, l par exemple, on le mettrait en évidence en écrivant

$$\text{am}(u,l),\quad \text{sn}(u,l),\quad \ldots.$$

Si l est égal au *module complémentaire*

$$k' = \sqrt{1-k^2},$$

alors, au lieu de $\text{am}(u,k')$, $\text{sn}(u,k')$, ..., nous écrirons simplement

$$\text{am}'u,\quad \text{sn}'u,\quad \text{cn}'u,\quad \text{dn}'u,\quad \text{tn}'u.$$

L'intégrale u, suivant qu'on la considère comme fonction de l'amplitude φ, de $\sin\varphi = \operatorname{sn} u = z$, de $\cos\varphi = \operatorname{cn} u = z_1$, etc., se représente par les notations

$$u = \arg\operatorname{am}\varphi = \arg\operatorname{sn} z = \arg\operatorname{cn} z_1 = \ldots.$$

1310. On a entre les fonctions elliptiques d'un même argument u les relations

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\operatorname{sn}^2 u + \operatorname{cn}^2 u = 1,\\ &k^2\operatorname{sn}^2 u + \operatorname{dn}^2 u = 1,\\ &\operatorname{dn}^2 u - k^2\operatorname{cn}^2 u = k'^2,\\ &\operatorname{tn} u = \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u}.\end{aligned}\right.$$

De l'égalité

$$d\varphi = \Delta\varphi . du, \quad \text{ou} \quad d\operatorname{am} u = \operatorname{dn} u\, du$$

et des relations précédentes on tire les formules

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &D_u \operatorname{am} u = \operatorname{dn} u, \quad D_u \operatorname{sn} u = \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u, \quad D_u \operatorname{cn} u = -\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u,\\ &\qquad D_u \operatorname{dn} u = -k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u, \quad D_u \operatorname{tn} u = \frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{cn}^2 u}.\end{aligned}\right.$$

Si l'on fait tour à tour

$$t = \operatorname{am} u,\ \operatorname{sn} u,\ \operatorname{cn} u,\ \operatorname{dn} u,\ \operatorname{tn} u,$$

l'argument elliptique u se présentera sous les diverses formes

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &\arg\operatorname{am} t = \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}},\\ &\arg\operatorname{sn} t = \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}},\\ &\arg\operatorname{cn} t = -\int_1^t \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(k'^2+k^2t^2)}},\\ &\arg\operatorname{dn} t = -\int_1^t \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(t^2-k^2)}},\\ &\arg\operatorname{tn} t = \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{(1+t^2)(1+k^2t^2)}}.\end{aligned}\right.$$

D'après ce que nous avons vu,

$$(4)\quad \begin{cases} \operatorname{am} u,\ \operatorname{sn} u,\ \operatorname{tn} u \text{ sont des fonctions impaires de } u, \\ \operatorname{cn} u,\ \operatorname{dn} u, \qquad\qquad \text{des fonctions paires,} \end{cases}$$

les premières s'annulant et les secondes devenant égales à l'unité pour $u = 0$.

Pour $u = K$, on a

$$(5)\quad \operatorname{am} K = \frac{\pi}{2},\quad \operatorname{sn} K = 1,\quad \operatorname{cn} K = 0,\quad \operatorname{dn} K = k',\quad \operatorname{tn} K = \infty.$$

Si le module $k = \sin\theta$ se réduit à zéro, on a

$$(6)\quad \begin{cases} \theta = 0,\quad k' = \cos\theta = 1,\quad K = \dfrac{\pi}{2},\quad K' = \infty, \\ \operatorname{am} u = u = \varphi,\quad \operatorname{sn} u = \sin u,\quad \operatorname{cn} u = \cos u,\quad \operatorname{dn} u = 1,\quad \operatorname{tn} u = \operatorname{tang} u. \end{cases}$$

Si k devient égal à l'unité, on aura alors

$$(7)\quad \begin{cases} k' = 0,\quad \theta = \dfrac{\pi}{2},\quad K = \infty,\quad K' = \dfrac{\pi}{2},\quad u = \log\operatorname{tang}\left(\dfrac{\varphi}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right), \\ \varphi = \operatorname{am}(u, 1) = \operatorname{Amh} u = 2\operatorname{arc\,tang} e^u - \dfrac{\pi}{2}, \\ \operatorname{sn} u = \operatorname{Th} u,\quad \operatorname{cn} u = \operatorname{dn} u = \dfrac{1}{\operatorname{Ch} u},\quad \operatorname{tn} u = \operatorname{Sh} u. \end{cases}$$

1311. De la discussion relative à la périodicité des fonctions elliptiques [1289 à 1295] il résulte que, si l'on suppose

$$(8)\quad \begin{cases} u = u_0 + 2mK + 2niK', \\ \qquad \text{on aura} \\ \operatorname{am} u = (m \pm n)\pi + (-1)^m \operatorname{am} u_0, \\ \operatorname{sn} u = (-1)^m \operatorname{sn} u_0, \\ \operatorname{cn} u = (-1)^{m+n} \operatorname{cn} u_0, \\ \operatorname{dn} u = (-1)^n \operatorname{dn} u_0, \\ \operatorname{tn} u = (-1)^n \operatorname{tn} u_0. \end{cases}$$

Si l'on suppose u égal à une somme de multiples pairs ou impairs de K et de iK′, on aura le Tableau de valeurs suivant :

u	sn u	cn u	dn u	tn u
$2m\mathrm{K}+2ni\mathrm{K}'$	0	$(-1)^{m+n}$	$(-1)^n$	0
$(2m+1)\mathrm{K}+2ni\mathrm{K}'$	$(-1)^n$	0	$(-1)^n k'$	∞
$2m\mathrm{K}+(2n+1)i\mathrm{K}'$	∞	∞	∞	$(-1)^n i$
$(2m+1)\mathrm{K}+(2n+1)i\mathrm{K}'$	$\dfrac{(-1)^m}{k}$	$\dfrac{(-1)^{m+n}k'}{ik}$	0	$\dfrac{(-1)^n i}{k'}$

1312. *Théorème d'addition des fonctions elliptiques.* — Nous avons déjà démontré au n° 827 la relation qui existe entre les fonctions elliptiques de deux arguments u, v et celles de leur somme $u+v$. L'importance de ce théorème nous engage à en donner encore une autre démonstration très-simple, due à M. Darboux.

L'argument u et la fonction $x = \operatorname{sn} u$ sont liés par l'équation

$$(9)\qquad \left(\frac{dx}{du}\right)^2 = (1-x^2)(1-k^2x^2) = \mathrm{X},$$

qui donne, par la différentiation,

$$\frac{dx}{du}\,\frac{d^2x}{du^2} = -x(1+k^2-2k^2x^2)\frac{dx}{du},$$

d'où

$$(10)\qquad \frac{d^2x}{du^2} = -x(1+k^2-2k^2x^2).$$

Pour une autre valeur y de la même fonction, on aura de même

$$(11)\qquad \left(\frac{dy}{du}\right)^2 = (1-y^2)(1-k^2y^2) = \mathrm{Y},$$

$$(12)\qquad \frac{d^2y}{du^2} = -y(1+k^2-2k^2y^2).$$

Les équations (10) et (12) donnent

$$(13)\qquad y\frac{d^2x}{du^2} - x\frac{d^2y}{du^2} = 2k^2xy(x^2 - y^2).$$

On tire, de plus, des équations (9) et (11),

$$(14)\qquad \left(y\frac{dx}{du}\right)^2 - \left(x\frac{dy}{du}\right)^2 = -(1 - k^2x^2y^2)(x^2 - y^2).$$

En divisant l'une par l'autre les équations (13) et (14), il vient

$$\frac{y\dfrac{d^2x}{du^2} - x\dfrac{d^2y}{du^2}}{\left(y\dfrac{dx}{du}\right)^2 - \left(x\dfrac{dy}{du}\right)^2} = -\frac{2k^2xy}{1 - k^2x^2y^2};$$

en multipliant de part et d'autre par $\left(y\dfrac{dx}{du} + x\dfrac{dy}{du}\right)du$, on en tire

$$\frac{d\left(y\dfrac{dx}{du} - x\dfrac{dy}{du}\right)}{y\dfrac{dx}{du} - x\dfrac{dy}{du}} = -\frac{2k^2xy\,d(xy)}{1 - k^2x^2y^2},$$

d'où, en intégrant,

$$(15)\qquad y\frac{dx}{du} - x\frac{dy}{du} = C(1 - k^2x^2y^2),$$

C étant une constante arbitraire.

Or, si $\varphi(u)$ est la fonction de u à laquelle x doit être égal en vertu de l'équation (9), les relations [827, IV]

$$du = \frac{dx}{\sqrt{X}} = -\frac{dy}{\sqrt{Y}}$$

montrent que les deux intégrales $\displaystyle\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{X}}$, $\displaystyle\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{Y}}$ doivent avoir une somme constante a, d'où il résulte que $y = \varphi(a-u)$. On a donc, en vertu de (15),

$$\varphi(a-u)\varphi'(u) + \varphi(u)\varphi'(a-u) = C\{1 - k^2[\varphi(u)]^2[\varphi(a-u)]^2\}.$$

Si l'on suppose maintenant $u = 0$, d'où $\varphi(u) = x = 0$, $\varphi'(u) = 1$, il vient, pour valeur de la constante arbitraire,

$$C = \varphi(a).$$

Si donc on pose $a - u = v$, l'équation deviendra

$$\frac{\varphi(v)\varphi'(u) + \varphi(u)\varphi'(v)}{1 - k^2[\varphi(u)]^2[\varphi(v)]^2} = \varphi(u+v)$$

ou enfin, en remplaçant la notation φ par sn et remarquant que $\varphi'(u) = \sqrt{(1-\operatorname{sn}^2 u)(1-k^2\operatorname{sn}^2 u)} = \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u$,

$$(16) \qquad \operatorname{sn}(u+v) = \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v + \operatorname{sn} v \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v}.$$

1313. On peut encore obtenir autrement cette formule et les formules analogues relatives aux autres fonctions elliptiques.

Reprenons les équations trouvées au nº 827, V, où nous avons posé

$$\varphi = \operatorname{am} u, \quad \chi = \operatorname{am} v, \quad \sigma = \operatorname{am}(u+v) = \operatorname{am} \omega.$$

En mettant, dans les équations (1), (2), (3) de ce numéro, à la place de A, B, C' leurs valeurs en fonction de σ, il vient

$$(17) \quad \begin{cases} \dfrac{\Delta\sigma - 1}{\sin\sigma}\sin(\varphi - \chi) = D_u(\varphi + \chi), \\ \dfrac{\Delta\sigma + 1}{\sin\sigma}\sin(\varphi + \chi) = D_u(\varphi - \chi), \\ (\Delta\sigma - 1)\cos(\varphi - \chi) - (\Delta\sigma + 1)\cos(\varphi + \chi) + 2\cos\sigma = 0. \end{cases}$$

En vertu des relations

$$\frac{d\varphi}{du} = \Delta\varphi, \quad \frac{d\chi}{du} = \frac{d\chi}{-dv} = -\Delta\chi,$$

les deux premières de ces équations peuvent s'écrire

$$(\Delta\sigma - 1)\sin(\varphi - \chi) = (\Delta\varphi - \Delta\chi)\sin\sigma,$$
$$(\Delta\sigma + 1)\sin(\varphi + \chi) = (\Delta\varphi + \Delta\chi)\sin\sigma,$$

d'où l'on tire

$$\sin\sigma\,\Delta\varphi = \sin\varphi\cos\chi\,\Delta\sigma + \sin\chi\cos\varphi,$$
$$\sin\sigma\,\Delta\chi = \sin\chi\cos\varphi\,\Delta\sigma + \sin\varphi\cos\chi.$$

La troisième relation (17) équivaut à celle-ci :

$$\cos\sigma = \cos\varphi\cos\chi - \sin\varphi\sin\chi\,\Delta\sigma.$$

En introduisant maintenant les arguments des fonctions elliptiques au lieu des amplitudes, les trois dernières équations deviennent

$$(18)\quad \begin{cases} \operatorname{sn} w \operatorname{dn} u = \operatorname{sn} u \operatorname{cn} v \operatorname{dn} w + \operatorname{sn} v \operatorname{cn} u, \\ \operatorname{sn} w \operatorname{dn} v = \operatorname{sn} v \operatorname{cn} u \operatorname{dn} w + \operatorname{sn} u \operatorname{cn} v, \\ \operatorname{cn} w \qquad = \operatorname{cn} u \operatorname{cn} v - \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{dn} w. \end{cases}$$

La relation

$$u + v - w = 0$$

pouvant s'écrire encore de deux autres manières,

$$v + (-w) - (-u) = 0,$$
$$w + (-u) - v = 0,$$

on pourra, des trois formules (18), en tirer six autres, en remplaçant respectivement

$$u, \quad v, \quad w,$$

soit par

$$v, \quad -w, \quad -u,$$

soit par

$$w, \quad -u, \quad v.$$

1314. Des deux premières équations (18) on tire

$$\operatorname{sn}(u+v) = \frac{\operatorname{sn}^2 u \operatorname{cn}^2 v - \operatorname{sn}^2 v \operatorname{cn}^2 u}{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v - \operatorname{sn} v \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}.$$

En multipliant les deux termes de la fraction par la somme des termes dont le dénominateur est la différence, et exprimant $\operatorname{cn}^2 u$, $\operatorname{dn}^2 u$, $\operatorname{cn}^2 v$, $\operatorname{dn}^2 v$ au moyen de $\operatorname{sn}^2 u$, $\operatorname{sn}^2 v$, on retrouvera la formule (16).

On obtiendra de même la formule

$$(19)\qquad \operatorname{dn}(u+v) = \frac{\operatorname{dn} u \operatorname{dn} v - k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{cn} u \operatorname{cn} v}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v}.$$

En portant cette valeur de $\operatorname{dn}(u+v)$ dans l'équation (6), on

aura

(20) $$\operatorname{cn}(u+v) = \frac{\operatorname{cn} u \operatorname{cn} v - \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{dn} u \operatorname{dn} v}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v}.$$

En divisant l'une par l'autre les formules (16) et (19), on en tire

(21) $$\operatorname{tn}(u+v) = \frac{\operatorname{tn} u \operatorname{dn} v + \operatorname{tn} v \operatorname{dn} u}{1 - \operatorname{tn} u \operatorname{dn} v . \operatorname{tn} v \operatorname{dn} u},$$

ou encore, en multipliant les deux termes du rapport $\dfrac{\operatorname{sn}(u+v)}{\operatorname{cn}(u+v)}$ par la somme des termes dont le dénominateur est la différence, et divisant haut et bas par $1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v$,

(22) $$\operatorname{tn}(u+v) = \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} v + \operatorname{sn} v \operatorname{cn} v \operatorname{dn} u}{\operatorname{cn}^2 u \operatorname{cn}^2 v - k'^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v}.$$

Enfin, l'équation (21) donne immédiatement

(23) $$\operatorname{am}(u+v) = \operatorname{arc\,tang}(\operatorname{tn} u \operatorname{dn} v) + \operatorname{arc\,tang}(\operatorname{tn} v \operatorname{dn} u).$$

1315. En faisant, dans les formules précédentes, $u = v$, on a les formules pour la duplication de l'argument :

(24) $$\left\{\begin{aligned} \operatorname{sn} 2u &= \frac{2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^4 u}, \\ \operatorname{cn} 2u &= \frac{\operatorname{cn}^2 u - \operatorname{sn}^2 u \operatorname{dn}^2 u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^4 u}, \\ \operatorname{dn} 2u &= \frac{\operatorname{dn}^2 u - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{cn}^2 u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^4 u}, \\ \operatorname{tn} 2u &= \frac{2 \operatorname{tn} u \operatorname{dn} u}{1 - \operatorname{tn}^2 u \operatorname{dn}^2 u}, \\ \operatorname{am} 2u &= 2 \operatorname{arc\,tang}(\operatorname{tn} u \operatorname{dn} u). \end{aligned}\right.$$

1316. Si dans les formules (16), (19), (20), (21) on change v en $-v$, on obtiendra les fonctions elliptiques de la différence $u - v$ des arguments.

En combinant ensemble ces deux séries de formules, on en déduira les formules données par Jacobi au § 18 des *Fundamenta*. On a, par exemple, en faisant, pour abréger,

$$u + v = s, \quad u - v = t, \quad 1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v = \mathrm{W},$$

les relations

$$\begin{aligned}
W(\operatorname{sn} s + \operatorname{sn} t) &= 2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v,\\
W(\operatorname{sn} s - \operatorname{sn} t) &= 2 \operatorname{sn} v \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u,\\
W(\operatorname{cn} s + \operatorname{cn} t) &= 2 \operatorname{cn} u \operatorname{cn} v,\\
W(\operatorname{cn} s - \operatorname{cn} t) &= -2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{dn} u \operatorname{dn} v,\\
W(\operatorname{dn} s + \operatorname{dn} t) &= 2 \operatorname{dn} u \operatorname{dn} v,\\
W(\operatorname{dn} s - \operatorname{dn} t) &= -2 k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{cn} u \operatorname{cn} v,\\
W \operatorname{sn} s \operatorname{sn} t &= \operatorname{sn}^2 u - \operatorname{sn}^2 v,\\
W \operatorname{cn} s \operatorname{cn} t &= \operatorname{cn}^2 u - \operatorname{sn}^2 v \operatorname{dn}^2 u,\\
W \operatorname{dn} s \operatorname{dn} t &= \operatorname{dn}^2 u - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v,\\
W(1 - \operatorname{sn} s \operatorname{sn} t) &= \operatorname{cn}^2 u + \operatorname{sn}^2 v \operatorname{dn}^2 u,
\end{aligned}$$

$$\operatorname{tn} s + \operatorname{tn} t = \frac{2 \operatorname{tn} u \operatorname{dn} v}{\operatorname{cn}^2 v (1 - k'^2 \operatorname{tn}^2 u \operatorname{tn}^2 v)},$$

etc.

1317. Considérons les fonctions de l'*argument complémentaire* $K - u$. Nous les représenterons par les mêmes lettres que les fonctions correspondantes de l'argument u, en ajoutant seulement à ces lettres la lettre c. Nous écrirons ainsi

$\operatorname{am}(K - u) = \operatorname{amc} u$, $\operatorname{sn}(K - u) = \operatorname{snc} u$, $\operatorname{cn}(K - u) = \operatorname{cnc} u$, etc. [1].

En faisant, dans les formules des nos **1312** et **1314**, $u = K$ et $v = -u$, on aura

$$(25) \left\{ \begin{aligned}
&\operatorname{snc} u = \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u}, \quad \operatorname{cnc} u = \frac{k' \operatorname{sn} u}{\operatorname{dn} u}, \quad \operatorname{dnc} u = \frac{k'}{\operatorname{dn} u}, \quad \operatorname{tnc} u = \frac{1}{k' \operatorname{tn} u},\\
&\operatorname{amc} u = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctang}(k' \operatorname{tn} u).
\end{aligned} \right.$$

On tire de là les relations

$$\frac{\operatorname{snc} u \operatorname{cnc} u}{\operatorname{dnc} u} = \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u},$$

$$\operatorname{dn} u \operatorname{dnc} u = \frac{1}{\operatorname{tn} u \operatorname{tnc} u} = k',$$

---

(1) Jacobi désigne ces mêmes fonctions par les notations

$\operatorname{coam} u$, $\sin \operatorname{coam} u$, $\cos \operatorname{coam} u$, etc.

ou

$$\frac{\operatorname{snc} u \operatorname{cnc} u}{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u} = \frac{k'}{\operatorname{dn}^2 u} = \frac{\operatorname{dnc} u}{\operatorname{dn} u}.$$

On conclut de ces formules que

(26) $\begin{cases} \operatorname{snc} u, \ \operatorname{dnc} u \ \text{sont des fonctions paires de } u, \\ \operatorname{cnc} u, \ \operatorname{tnc} u \ \text{sont des fonctions impaires de } u. \end{cases}$

1318. D'après ce que nous avons vu aux n^{os} **1287**, **1291**, **1292**, **1294**, les fonctions elliptiques, pour les valeurs o, K, iK', $K \pm iK'$ de l'argument u, prennent les valeurs indiquées dans le Tableau suivant :

u	$\operatorname{sn} u$	$\operatorname{cn} u$	$\operatorname{dn} u$	$\operatorname{tn} u$
o	o	1	1	o
K	1	o	k'	∞
iK'	$i\infty$	$+\infty$	$+\infty$	1
$K \pm iK'$	$\frac{1}{k}$	$-\frac{ik'}{k}$	o	$\frac{i}{k'}$

En combinant ces valeurs avec les formules d'addition des n^{os} **1312** et **1314**, on obtient les valeurs des fonctions elliptiques de l'argument U pour chacune des valeurs $u+K$, $u+iK'$, $u+K+iK'$:

U	sn U	cn U	dn U	tn U
$u+K$	$\operatorname{snc} u$	$-\operatorname{cnc} u$	$\operatorname{dnc} u$.	$-\operatorname{tnc} u$
$u+iK'$	$\frac{1}{k \operatorname{sn} u}$	$\frac{\operatorname{dn} u}{ik \operatorname{sn} u} = \frac{k'}{ik \operatorname{cnc} u}$	$\frac{1}{i \operatorname{tn} u}$	$\frac{i}{\operatorname{dn} u}$
$u+K+iK'$	$\frac{1}{k \operatorname{snc} u}$	$\frac{\operatorname{dnc} u}{ik \operatorname{snc} u} = \frac{k'}{ik \operatorname{cn} u}$	$\frac{i}{\operatorname{tnc} u} = ik' \operatorname{tn} u$	$\frac{i}{\operatorname{dnc} u} = \frac{i \operatorname{dn} u}{k'}$

On peut vérifier directement ces formules en remarquant que l'on a

$$\mathrm{K} - u = \int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}.$$

Si l'on pose

$$\sin \varphi_1 = \frac{\cos \varphi}{\Delta \varphi},$$

on en tire

$$\cos\varphi_1\, d\varphi_1 = \left(-\Delta\varphi \sin\varphi + \cos\varphi \frac{k^2 \sin\varphi \cos\varphi}{\Delta\varphi}\right) \frac{d\varphi}{\Delta^2 \varphi} = -\frac{k'^2 \sin\varphi\, d\varphi}{\Delta^3 \varphi},$$

d'où

$$\frac{d\varphi_1}{\Delta\varphi_1} = -\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}, \quad \mathrm{K} - u = \int_0^{\varphi_1} \frac{d\varphi_1}{\Delta\varphi_1},$$

$$\sin\varphi_1 = \operatorname{sn}(\mathrm{K} - u).$$

1319. Nous distinguerons, comme nous l'avons indiqué plus haut [1309], par un accent les fonctions elliptiques relatives au module complémentaire $k' = \sqrt{1 - k^2}$, et nous aurons ainsi

$$\operatorname{am}' u = \operatorname{am}(u, k'), \quad \operatorname{sn}' u = \operatorname{sn}(u, k'), \quad \ldots.$$

Si l'on pose

$$u = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}},$$

on en conclura

$$z = \operatorname{sn} u.$$

Changeons z en iz; il viendra

$$u = \int_0^{iz} \frac{d(iz)}{\sqrt{[1 - (iz)^2][1 - k^2 (iz)^2]}} = i \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1 + z^2)(1 + k^2 z^2)}}.$$

En comparant cette formule avec la dernière formule (3) du n° 1310, on en conclura

$$\frac{u}{i} = \arg \operatorname{tn}(z, k') = \frac{1}{i} \arg \operatorname{sn} iz.$$

Donc on a à la fois

$$iz = \operatorname{sn} u, \quad z = \operatorname{tn}' \frac{u}{i},$$

d'où, en changeaut u en iu,

(27) $$\operatorname{sn} iu = i \operatorname{tn}' u.$$

De même, dans la formule

$$\arg \operatorname{cn} z = u = -\int_1^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(k'^2+k^2z^2)}},$$

changeons z en $\frac{1}{z}$; il viendra

$$u = -\int_1^{\frac{1}{z}} \frac{d\,\frac{1}{z}}{\sqrt{\left(1-\frac{1}{z^2}\right)\left(k'^2+\frac{k^2}{z^2}\right)}} = -i\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(k^2+k'^2z^2)}},$$

d'où l'on tire

$$\frac{1}{z} = \operatorname{cn} u, \quad z = \operatorname{cn}' \frac{u}{i}.$$

En changeant donc u en iu, on aura

(28) $$\operatorname{cn} iu = \frac{1}{\operatorname{cn}' u}.$$

Des formules (27) et (28) on tire immédiatement

(29) $$\operatorname{tn} iu = i \operatorname{sn}' u.$$

Enfin, en changeant u en iu, la formule (27) donne

(30) $$\operatorname{dn} iu = \sqrt{1+k^2 \operatorname{tn}'^2 u} = \frac{\operatorname{dn}' u}{\operatorname{cn}' u} = \frac{1}{\operatorname{snc}' u},$$

$\operatorname{snc}' u$ désignant $\operatorname{sn}(K'-u, k')$.

On peut encore vérifier cette formule comme il suit. Soit

$$y = \frac{1}{\operatorname{snc} u} = \frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{cn} u};$$

on en tire

$$\frac{dy}{du} = \frac{k'^2 \operatorname{sn} u}{\operatorname{cn}^2 u}.$$

D'ailleurs

$$\operatorname{cn}^2 u = \frac{k'^2}{y^2-k^2}, \quad \operatorname{sn} u = \sqrt{\frac{y^2-1}{y^2-k^2}};$$

partant,

$$du = \frac{\operatorname{cn}^2 u\, dy}{k'^2 \operatorname{sn} u} = \frac{dy}{\sqrt{(y^2-1)(y^2-k^2)}}.$$

Donc, en changeant k en k', on aura, pour $y = \frac{1}{\operatorname{snc}' u}$,

$$u = \int_1^y \frac{dy}{\sqrt{(y^2-1)(y^2-k'^2)}}.$$

Or on a, en supposant $z = \operatorname{dn} u$,

$$u = -\int_1^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(z^2-k'^2)}} = -i\int_1^z \frac{dz}{\sqrt{(z^2-1)(z^2-k'^2)}}$$

$= -i \times$ l'argument dont la fonction $\frac{1}{\operatorname{snc}'}$ est égale à z. Par conséquent, on a

$$\operatorname{dn}\frac{u}{i} = \frac{1}{\operatorname{snc}' u}, \quad \text{ou} \quad \operatorname{dn} iu = \frac{1}{\operatorname{snc}' u} = \frac{\operatorname{dn}' u}{\operatorname{cn}' u}.$$

Des formules que nous venons d'établir on déduirait aisément les valeurs des fonctions elliptiques de l'argument $u + i\mathrm{K}'$ qui se trouvent dans le Tableau du numéro précédent. On a, en effet,

$$\operatorname{sn}(u+i\mathrm{K}') = \operatorname{sn} i(\mathrm{K}'-iu) = i\operatorname{tn}'(\mathrm{K}'-iu) = i\operatorname{tnc}' iu = \frac{i}{k\operatorname{tn}' iu} = \frac{1}{k\operatorname{sn} u},$$

et de même pour les autres fonctions.

§ III.

DÉCOMPOSITION DES FONCTIONS ELLIPTIQUES EN SÉRIES DE FRACTIONS SIMPLES.

1320. Nous avons établi, au n° **1206**, la formule

$$(1) \qquad f(u) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{A}} \frac{f(v)\,dv}{v-u} + \frac{1}{2\pi i}\sum \int_c \frac{f(v)\,dv}{u-v},$$

la première intégrale se rapportant au contour de l'aire $\mathfrak{A}$, les autres aux divers infinis c de la fonction $f(u)$ contenus dans cette aire.

Prenons pour $\mathfrak{A}$ l'aire entourée par une courbe de dimensions

infiniment grandes et de forme quelconque, symétrique par rapport à l'origine, mais ne passant par aucun des infinis de la fonction, de sorte que $f(v)$ ne devienne infinie en aucun point du contour. Si l'intégrale

$$\int_{\mathfrak{A}} \frac{f(v)\,dv}{v},$$

prise le long de cette courbe, a, en deux points diamétralement opposés, ses éléments égaux et de signes contraires, alors cette intégrale sera nulle, et il en sera de même de l'intégrale

$$\int_{\mathfrak{A}} \frac{f(v)\,dv}{v-u} = \int_{\mathfrak{A}} \frac{1}{1-\frac{u}{v}}\,\frac{f(v)\,dv}{v},$$

dont la valeur différera infiniment peu de celle de l'intégrale précédente [1211], si tous les points c sont situés à des distances finies de l'origine. Donc, dans ce cas, la valeur de $f(u)$ se réduira à

$$(2) \qquad f(u) = \sum \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(v)\,dv}{u-v},$$

c'est-à-dire à la somme des résidus de la fonction (u) relatifs aux infinis de cette fonction compris dans l'intérieur de l'aire $\mathfrak{A}$.

Si les points c se rencontrent à des distances aussi grandes que l'on voudra de l'origine, et que la première intégrale de la formule (1) ait toujours pour limite zéro lorsque tous les points du contour s'en vont à l'infini, la formule (2) continuera à subsister.

Nous avons déjà, dans le Chapitre II du Livre VI, appliqué cette formule au développement des fonctions $\sin u$, $\operatorname{tang} u$, $\operatorname{coséc} u$, ...; appliquons-la maintenant au développement des quatre fonctions elliptiques

$$\operatorname{sn} u,\quad \operatorname{cn} u,\quad \operatorname{dn} u,\quad \operatorname{tn} u.$$

1321. Supposons d'abord

$$f(u) = \operatorname{sn} u.$$

Cette fonction étant impaire, l'intégrale $\int_{\mathfrak{A}} \frac{\operatorname{sn} u}{u}\,du$, prise le long d'un contour infini, symétrique par rapport à l'origine, sera nulle.

Les infinis c de la fonction $\operatorname{sn} u$ sont compris [1289] dans la

formule

$$c = 2m\mathrm{K} + (2n+1)i\mathrm{K}'.$$

Le résidu de cette fonction $\operatorname{sn} u$, relatif à l'un de ces points, sera

$$\lim_{v=c} (v-c)\frac{\operatorname{sn} v}{u-v};$$

or, en posant

$$v = \varepsilon + c = \varepsilon + 2m\mathrm{K} + (2n+1)i\mathrm{K}',$$

on a [**1289** et **1318**]

$$\operatorname{sn} v = (-1)^m \operatorname{sn}(\varepsilon + i\mathrm{K}') = \frac{(-1)^m}{k \operatorname{sn} \varepsilon};$$

donc, $\lim \frac{\varepsilon}{\operatorname{sn} \varepsilon}$ étant l'unité, la valeur cherchée sera

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{(-1)^m \varepsilon}{k \operatorname{sn} \varepsilon} \frac{1}{u - \varepsilon - 2m\mathrm{K} - (2n+1)i\mathrm{K}'}$$
$$= \frac{(-1)^m}{k} \frac{1}{u - 2m\mathrm{K} - (2n+1)\mathrm{K}'}.$$

En conséquence, la formule (2) donne, pour m et n croissant l'un et l'autre à l'infini,

$$\operatorname{sn} u = \frac{1}{k} \lim \sum_{-n-1}^{+n} \sum_{-m}^{+m} \frac{(-1)^m}{u - 2m\mathrm{K} - (2n+1)i\mathrm{K}'}.$$

Si l'on suppose que l'aire $\mathfrak{A}$ ait la forme d'un rectangle dont le centre soit l'origine des coordonnées et dont les côtés soient parallèles aux axes, on pourra d'abord sommer les termes qui se trouvent sur une même parallèle aux x, et calculer, pour n constant, l'expression

$$\lim_{m=\infty} \sum_{-m}^{+m} \frac{(-1)^m}{\mathrm{U} - 2m\mathrm{K}},$$

en faisant, pour abréger,

$$\mathrm{U} = u - (2n+1)i\mathrm{K}'.$$

Or on a [**1212**]

$$\operatorname{coséc} x = \lim_{m=\infty} \sum_{-m}^{+m} \frac{(-1)^m}{x - m\pi}.$$

Si l'on pose maintenant

$$\eta = \frac{\pi}{2K}, \quad \eta U = \eta u - (2n+1) i \eta K',$$

puis

$$\eta u = x, \quad \eta K' = \frac{\pi K'}{2K} = \rho,$$

la somme précédente deviendra

$$\lim \eta \sum_{-m}^{+m} \frac{(-1)^m}{x - (2n+1) i\rho - m\pi} = \eta \ \text{coséc}[x - (2n+1) i\rho].$$

Donc

$$\operatorname{sn} u = \frac{\eta}{k} \lim \sum_{-n-1}^{+n} \frac{1}{\sin[x - (2n+1) i\rho]}.$$

1322. Considérons maintenant, en général, une série de la forme

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{1}{\sin(x - \nu i \rho)},$$

x et ρ étant réels, et ρ positif. Le rapport de deux termes consécutifs

$$\frac{\sin(x - \nu i\rho)}{\sin[x - (\nu+1) i\rho]} = \frac{e^{\nu\rho + ix} - e^{-\nu\rho - ix}}{e^{(\nu+1)\rho + ix} - e^{-(\nu+1)\rho - ix}} = \frac{1}{e^\rho} \frac{1 - e^{-2(\nu\rho + ix)}}{1 - e^{-2[(\nu+1)\rho + ix]}}$$

a pour limite correspondante à $\nu = \infty$ la quantité $\frac{1}{e^\rho}$, qui est moindre que l'unité. Donc la série est absolument convergente. Il en serait de même de la série

$$\sum_{-1}^{-\infty} \frac{1}{\sin(x - \nu i\rho)}.$$

Il résulte de là que les deux parties de la série

$$\sum_{-n-1}^{+n} \frac{1}{\sin[x - (2n+1) i\rho]},$$

correspondantes l'une aux multiples positifs, l'autre aux multiples

négatifs de $i\rho$, sont toutes les deux séparément convergentes. On peut donc y remplacer les limites infiniment grandes $-n-1$ et $+n$ de l'indice par deux nombres infiniment grands quelconques, et écrire simplement

$$(3) \qquad \operatorname{sn} u = \frac{\eta}{k} \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sin[x-(2n-1)i\rho]}.$$

Si l'on groupe ensemble les termes contenant des multiples de $i\rho$ égaux et de signes contraires, on aura, en remarquant que

$$\frac{1}{\sin(x-a)} + \frac{1}{\sin(x+a)} = \frac{\sin x \cos a}{\cos 2a - \cos 2x},$$

et introduisant les fonctions hyperboliques,

$$(4) \qquad \operatorname{sn} u = \frac{\eta}{k} \sin x \sum_{0}^{\infty} \frac{\operatorname{Ch}(2n+1)\rho}{\operatorname{Ch}(4n+2)\rho - \cos 2x}.$$

Si l'on pose actuellement

$$q = e^{-2\rho} = e^{-\frac{\pi K'}{K}},$$

on aura

$$\operatorname{Ch} \nu\rho = \frac{1}{2}\left(q^{-\frac{\nu}{2}} + q^{\frac{\nu}{2}}\right),$$

ce qui donne à la formule (4) la forme suivante :

$$(5) \qquad \operatorname{sn} u = \frac{4\eta\sqrt{q}}{k} \sin x \sum_{0}^{\infty} \frac{q^{n}(1+q^{2n+1})}{1 - 2q^{2n+1}\cos 2x + q^{4n+2}}.$$

1323. Pour arriver au développement de $\operatorname{cn} u$, commençons par obtenir celui de la fonction impaire $\operatorname{cn}(u-K) = f(u)$, dont les infinis sont [1292]

$$u - K = 2mK + (2n+1)iK'$$

ou

$$u = (2m+1)K + (2n+1)iK' = c.$$

Le résidu relatif à l'un de ces points est

$$\lim (v-c)\frac{f(v)}{u-v} = \lim \frac{\varepsilon f[\varepsilon + (2m+1)K + (2n+1)iK']}{u - \varepsilon - (2m+1)K - (2n+1)iK'}.$$

Or on a [1292]

$$\operatorname{cn} u = (-1)^{m+n} \operatorname{cn}(2m\mathrm{K} + 2ni\mathrm{K}' + u),$$

d'où

$$\operatorname{cn}(u - \mathrm{K}) = f(u) = (-1)^{m+n} \operatorname{cn}[(2m-1)\mathrm{K} + 2ni\mathrm{K}' + u].$$

Donc [1318]

$$f[\varepsilon + (2m+1)\mathrm{K} + (2n+1)i\mathrm{K}'] = (-1)^{m+n} f(\varepsilon + \mathrm{K} + i\mathrm{K}')$$
$$= (-1)^{m+n} \operatorname{cn}(\varepsilon + i\mathrm{K}') = (-1)^{m+n} \frac{\operatorname{dn}\varepsilon}{ik \operatorname{sn}\varepsilon},$$

d'où l'on tire

$$\lim(v - c)\frac{f(v)}{u - v}$$
$$= \lim(-1)^{m+n} \frac{1}{ik} \frac{\varepsilon \operatorname{dn}\varepsilon}{\operatorname{sn}\varepsilon} \frac{1}{u - \varepsilon - (2m+1)\mathrm{K} - (2n+1)i\mathrm{K}'}$$
$$= \frac{(-1)^{m+n}}{ik} \frac{1}{u - (2m+1)\mathrm{K} - (2n+1)i\mathrm{K}'},$$

et par suite

$$\operatorname{cn}(u - \mathrm{K}) = \frac{1}{ik} \lim \sum_{-n-1}^{+n} (-1)^n \sum_{-m-1}^{+m} \frac{(-1)^m}{u - (2m+1)\mathrm{K} - (2n+1)i\mathrm{K}'}.$$

En remplaçant $u - \mathrm{K}$ par u, on a

$$\operatorname{cn} u = \frac{1}{ik} \lim \sum_{-n-1}^{+n} (-1)^n \sum_{-m-1}^{+m} \frac{(-1)^m}{u - 2m\mathrm{K} - (2n+1)i\mathrm{K}'}.$$

Enfin, en supprimant, à la gauche du rectangle qui forme le contour de l'aire infiniment grande, un terme infiniment petit, correspondant à l'indice $-m-1$, ce qui ne peut avoir d'influence sur la limite de la somme, on aura

$$(6) \qquad \operatorname{cn} u = \frac{1}{ik} \lim \sum_{-n-1}^{+n} (-1)^n \sum_{-m}^{+m} \frac{(-1)^m}{u - 2m\mathrm{K} - (2n+1)i\mathrm{K}'}.$$

Si l'on pose, pour un instant,

$$u - (2n+1)i\mathrm{K}' = \mathrm{U},$$

on aura, comme dans le numéro précédent, la somme

$$\lim \sum_{-m}^{+m} \frac{(-1)^m}{U - 2mK},$$

que nous avons trouvée égale à

$$\eta \operatorname{coséc}[x - (2n+1)i\rho].$$

Donc

$$(7) \qquad \operatorname{cn} u = \frac{\eta}{ik} \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sin[x - (2n+1)i\rho]}.$$

On a maintenant

$$\frac{1}{\sin(x-a)} - \frac{1}{\sin(x+a)} = \frac{\cos x \sin a}{\cos 2a - \cos 2x},$$

d'où, en groupant ensemble les termes correspondants à deux valeurs égales et opposées de $2n+1$,

$$(8) \qquad \operatorname{cn} u = \frac{\eta}{k} \cos x \sum_{0}^{\infty} \frac{\operatorname{Sh}(2n+1)\rho}{\operatorname{Ch}(4n+2)\rho - \cos 2x},$$

ou, sous une autre forme,

$$(9) \qquad \operatorname{cn} u = \frac{4\eta\sqrt{q}}{k} \cos x \sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n q^n (1 - q^{2n+1})}{1 - 2q^{2n+1}\cos 2x + q^{4n+2}}.$$

1324. Soit, de même, la fonction impaire

$$f(u) = \operatorname{dn}(u + iK'),$$

dont les infinis sont [1295]

$$u + iK' = 2mK + (2n+1)iK',$$

ou

$$u = 2mK + 2niK' = c.$$

Le résidu relatif à l'un de ces points est

$$\lim(v - c)\frac{f(v)}{u - v} = \lim \frac{\varepsilon f(\varepsilon + 2mK + 2niK')}{u - \varepsilon - 2mK - 2niK'}.$$

Or on a [1295]

$$\operatorname{dn} u = (-1)^n \operatorname{dn}(u + 2m\mathrm{K} + 2ni\mathrm{K}'),$$

d'où

$$\operatorname{dn}(u + i\mathrm{K}') = f(u) = (-1)^n \operatorname{dn}[u + 2m\mathrm{K} + (2n+1)i\mathrm{K}'].$$

Donc [1318]

$$f(\varepsilon + 2m\mathrm{K} + 2ni\mathrm{K}') = (-1)^n f(\varepsilon) = (-1)^n \operatorname{dn}(\varepsilon + i\mathrm{K}') = (-1)^n \frac{1}{i \operatorname{tn} \varepsilon},$$

d'où

$$\lim (v - c) \frac{f(v)}{u - v} = \frac{(-1)^n}{i} \lim \frac{\varepsilon}{\operatorname{tn} \varepsilon} \frac{1}{u - \varepsilon - 2m\mathrm{K} - 2ni\mathrm{K}'}$$

$$= \frac{(-1)^n}{i} \frac{1}{u - 2m\mathrm{K} - 2ni\mathrm{K}'},$$

et par suite

$$\operatorname{dn}(u + i\mathrm{K}') = \frac{1}{i} \lim \sum_{-n}^{+n} (-1)^n \sum_{-m}^{+m} \frac{1}{u - 2m\mathrm{K} - 2ni\mathrm{K}'}.$$

En remplaçant maintenant $u + i\mathrm{K}'$ par u, on aura

$$\operatorname{dn} u = \frac{1}{i} \lim \sum_{-n}^{+n} (-1)^n \sum_{-m}^{+m} \frac{1}{u - 2m\mathrm{K} - (2n+1)i\mathrm{K}'}.$$

Si l'on pose, comme plus haut,

$$u - (2n+1)i\mathrm{K}' = \mathrm{U},$$

la dernière somme deviendra

$$\sum_{-m}^{+m} \frac{1}{\mathrm{U} - 2m\mathrm{K}}.$$

Or [1216, I] la formule

$$\operatorname{tang} x = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\frac{\pi}{2} - x - n\pi}$$

peut s'écrire, en changeant x en $\frac{\pi}{2} - x$,

$$\cot x = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x - n\pi},$$

d'où, en remplaçant ηU par $x-(2n+1)i\rho$, on trouve la somme en question égale à

$$\eta \cot[x-(2n+1)i\rho].$$

Donc

$$(\Delta)\qquad \mathrm{dn}\,u = \frac{\eta}{i}\lim\sum_{-n}^{+n}(-1)^n\cot[x-(2n+1)i\rho].$$

Les termes de cette somme ne tendent pas isolément vers zéro pour n infini; on a, en effet,

$$\cot(x-\nu i\rho) = \frac{1+i\,\mathrm{tang}\,x\,\mathrm{Th}\,\nu\rho}{\mathrm{tang}\,x - i\,\mathrm{Th}\,\nu\rho},$$

et, $\mathrm{Th}\,\nu\rho$ devenant égal à l'unité pour ν infini, la limite de cette expression est égale à i. Mais si, au lieu de la valeur de $\mathrm{dn}\,u$, nous cherchons celle de $1-\mathrm{dn}\,u$, on aura, en faisant, dans l'équation (Δ), $x=0$,

$$1 = -\frac{\eta}{i}\lim\sum_{-n}^{+n}(-1)^n\cot(2n+1)i\rho,$$

ce qui donne

$$1-\mathrm{dn}\,u = i\eta\lim\sum_{-n}^{+n}(-1)^n\{\cot(2n+1)i\rho+\cot[x-(2n+1)i\rho]\}$$

$$= i\eta\sin x\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\sin(2n+1)i\rho\,\sin[x-(2n+1)i\rho]},$$

série dont les termes tendent séparément vers zéro.

En groupant ensemble les termes d'indices égaux et opposés, on a enfin

$$(10)\qquad \mathrm{dn}\,u = 1-4\eta\sin^2 x\sum_0^\infty\frac{(-1)^n\,\mathrm{Coth}(2n+1)\rho}{\mathrm{Ch}(4n+2)\rho-\cos 2x}$$

ou, sous une autre forme,

$$(11)\qquad \mathrm{dn}\,u = 1-8\eta\sin^2 x\sum_0^\infty\frac{(-1)^n q^{2n+1}\dfrac{1+q^{2n+1}}{1-q^{2n+1}}}{1-2q^{2n+1}\cos 2x+q^{4n+2}}.$$

1325. Développons enfin la fonction $\mathrm{tn}\,u$, dont les infinis sont

donnés par la formule

$$c = (2m+1)K + 2niK'.$$

Si l'on pose

$$v = \varepsilon + (2m+1)K + 2niK',$$

on aura

$$\operatorname{tn} v = (-1)^n \operatorname{tn}(\varepsilon + K) = -\frac{(-1)^n}{k' \operatorname{tn} \varepsilon}.$$

Donc

$$\operatorname{tn} u = -\frac{1}{k'} \lim \sum_{-n}^{+n} (-1)^n \sum_{-m-1}^{+m} \frac{1}{u - (2m+1)K - 2niK'}.$$

Or nous avons trouvé [1216, I]

$$\operatorname{tang} z = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(2m+1)\frac{\pi}{2} - z}.$$

En faisant donc

$$\eta[(2m+1)K - (u - 2niK')] = (2m+1)\frac{\pi}{2} - z$$

on aura

$$-\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{u - (2m+1)K - 2niK'} = \eta \operatorname{tang} z,$$

d'où, en mettant pour z sa valeur $x - 2ni\rho$,

$$\operatorname{tn} u = \frac{\eta}{k'} \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^n \operatorname{tang}(x - 2ni\rho).$$

Si l'on groupe ensemble les termes d'indice égal et opposé, il viendra

$$(12) \qquad \operatorname{tn} u = \frac{\eta}{k'} \left[\operatorname{tang} x + 2 \sin 2x \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\operatorname{Ch} 4n\rho + \cos 2x} \right],$$

ou encore

$$(13) \qquad \operatorname{tn} u = \frac{\eta}{k'} \left[\operatorname{tang} x + 4 \sin 2x \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{2n}}{1 + 2q^{2n} \cos 2x + q^{4n}} \right].$$

1326. A l'aide des formules précédentes, il est aisé d'obtenir

des relations entre le rapport $\frac{iK'}{K} = \frac{2i}{\pi}\rho$ des deux périodes K, iK' des fonctions elliptiques et les constantes k et K, et par suite aussi les constantes complémentaires k', K'.

Si dans la formule (3) [1322] on fait

$$u = K + iK', \quad \text{ou} \quad x = \frac{\pi}{2} + i\rho,$$

on en tire immédiatement [1318]

$$\frac{1}{k} = \frac{\eta}{k}\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2ni\rho\right)} = \frac{\pi}{2Kk}\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\operatorname{Ch} 2n\rho},$$

ou, en groupant les termes deux à deux

$$(14) \qquad K = \frac{\pi}{2}\left(1 + 2\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{\operatorname{Ch} 2n\rho}\right) = \frac{\pi}{2}\left(1 + 4\sum_{1}^{\infty}\frac{q^n}{1+q^{2n}}\right),$$

formule qui donne la valeur du *quadrant elliptique* K, exprimée en fonction de ρ ou de q.

En faisant, dans la même formule (3),

$$u = K \quad \text{ou} \quad x = \frac{\pi}{2},$$

il vient

$$1 = \frac{\eta}{k}\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sin\left[\frac{\pi}{2} - (2n+1)i\rho\right]} = \frac{\pi}{2Kk}\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\operatorname{Ch}(2n+1)\rho},$$

d'où l'on tire

$$(15) \qquad k = \frac{\pi}{K}\sum_{0}^{\infty}\frac{1}{\operatorname{Ch}(2n+1)\rho} = \frac{2\pi\sqrt{q}}{K}\sum_{0}^{\infty}\frac{q^n}{1+q^{2n+1}}.$$

Si l'on avait fait $u = x = 0$ dans la formule (7) du n° 1323, on aurait eu de même

$$1 = \frac{\eta}{ik}\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\sin(2n+1)i\rho} = \frac{\eta}{k}\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\operatorname{Sh}(2n+1)\rho}$$

ou

$$(16) \qquad k = \frac{\pi}{K}\sum_{0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\operatorname{Sh}(2n+1)\rho} = \frac{2\pi\sqrt{q}}{K}\sum_{0}^{\infty}\frac{(-q)^n}{1-q^{2n+1}}.$$

L'identité des deux valeurs (15) et (16) montre que la fonction

$$\sum_0^\infty \frac{q^n}{1+q^{2n+1}}$$

est une fonction paire de q.

Ainsi la connaissance de ρ ou de q, c'est-à-dire du rapport $\frac{iK'}{K}$ des périodes des fonctions elliptiques, détermine sans ambiguïté les constantes K et k.

La réciproque ne serait pas vraie; car, pour une même valeur de k, on peut prendre, pour former les périodes de sn$u$ au lieu de K et de $2iK'$, les expressions plus générales

$$\mathfrak{K} = (4\mu+1)K + 2\nu i K',$$
$$\mathfrak{K}' = 4\mu' K + (2\nu'+1) i K',$$

et ρ serait remplacé par la quantité

$$r = \frac{\pi}{2}\,\frac{4\mu' K + (2\nu'+1) iK'}{(4\mu+1)K + 2\nu i K'},$$

μ, ν, μ', ν' étant quatre entiers assujettis à la seule condition de satisfaire à l'égalité

$$(4\mu+1)(2\nu'+1) - 8\mu'\nu = \pm 1.$$

§ IV.

DÉVELOPPEMENT DES FONCTIONS ELLIPTIQUES EN PRODUITS INFINIS. FONCTIONS Θ.

1327. Occupons-nous d'abord de la fonction dn$u$, dont les zéros sont donnés par la formule

$$v = (2m+1)K + (2n+1)iK',$$

et les infinis par la formule

$$v = 2mK + (2n+1)iK',$$

les zéros, comme les infinis, étant chacun du premier ordre.

L'intégrale $\int_{\mathfrak{A}} \frac{d \log f(\zeta)}{\zeta}$ [1214] devient ici

$$\int_{\mathfrak{A}} \frac{d\,\mathrm{dn}\,v}{v\,\mathrm{dn}\,v} = -k^2 \int_{\mathfrak{A}} \frac{\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{cn}\,v}{\mathrm{dn}\,v}\,\frac{dv}{v},$$

et, si l'on prend pour contour de $\mathfrak{A}$ une ligne symétrique par rapport à l'origine, cette intégrale sera nulle.

Nous choisirons pour aire celle d'un rectangle ayant son centre à l'origine, et dont les côtés soient parallèles aux axes et ne passent par aucun des zéros ni des infinis de la fonction. Les zéros qu'il renfermera s'obtiendront en faisant varier m depuis $-m-1$ jusqu'à $+m$, et n depuis $-n-1$ jusqu'à $+n$ [1215]; pour les infinis, on fera varier n entre les mêmes limites et m depuis $-m$ jusqu'à $+m$.

Cela posé, la valeur de $\mathrm{dn}\,u$ prendra la forme

$$\mathrm{dn}\,u = \lim \frac{\prod\left[1 - \frac{u}{(2m+1)K + (2n+1)iK'}\right]}{\prod\left[1 - \frac{u}{2mK + (2n+1)iK'}\right]},$$

le produit supérieur s'étendant à tous les zéros, et le produit inférieur à tous les infinis contenus dans l'aire $\mathfrak{A}$. Traitons séparément ces deux produits.

Nous avons trouvé [1216]

$$\frac{\cos(x - x_0)}{\cos x_0} = \lim_{m=\infty} \prod_{-m-1}^{+m} \left[1 - \frac{x}{x_0 + (2m+1)\frac{\pi}{2}}\right].$$

Si l'on pose

$$\eta = \frac{\pi}{2K}, \quad x = \eta u, \quad \rho = \eta K', \quad x_0 = \eta(2n+1)iK' = (2n+1)i\rho,$$

le numérateur de $\mathrm{dn}\,u$ deviendra

$$(1) \qquad \lim_{n=\infty} \prod_{-n-1}^{+n} \frac{\cos[x - (2n+1)i\rho]}{\cos(2n+1)i\rho}.$$

En groupant ensemble les termes symétriques par rapport à l'origine, on a

$$\frac{\cos[x-(2n+1)i\rho]}{\cos(2n+1)i\rho}\,\frac{\cos[x+(2n+1)i\rho]}{\cos(2n+1)i\rho}=1-\frac{\sin^2 x}{\cos^2(2n+1)i\rho}.$$

Le numérateur de $\operatorname{dn} u$, que nous représenterons provisoirement par $\Theta_3(u)$, aura donc pour valeur

$$\Theta_3(u)=\prod_0^\infty\left[1-\frac{\sin^2 x}{\operatorname{Ch}^2(2n+1)\rho}\right],$$

expression dont la convergence est évidente [1213].

Si l'on remplace, dans le calcul précédent, x_0 par $x_0-\frac{\pi}{2}$, on aura, en écrivant au bas du signe Π l'indice $-m$ au lieu de $-m-1$, ce qui est permis [1323],

$$\frac{\sin(x-x_0)}{\sin x_0}=\lim_{m=\infty}\prod_{-m}^{+m}\left(1-\frac{x}{x_0+2m\frac{\pi}{2}}\right).$$

Donc, d'après les notations ci-dessus, le dénominateur de $\operatorname{dn} u$ deviendra

$$(2)\qquad -\lim_{n=\infty}\prod_{-n-1}^{+n}\frac{\sin[x-(2n+1)i\rho]}{\sin(2n+1)i\rho}.$$

En groupant ensemble les termes symétriquement placés, on obtient, pour l'expression du dénominateur de $\operatorname{dn} u$,

$$\Theta(u)=\prod_0^\infty\left[1+\frac{\sin^2 x}{\operatorname{Sh}^2(2n+1)\rho}\right].$$

1328. La fonction paire $\operatorname{cn} u$ a pour zéros simples les valeurs

$$v=(2m+1)K+2niK',$$

et ses infinis sont les mêmes que ceux de $\operatorname{dn} u$. En intégrant suivant le contour du même rectangle que tout à l'heure, on verra

encore que l'intégrale

$$\int_{\mathfrak{A}} \frac{d\,\mathrm{cn}\,u}{v\,\mathrm{cn}\,v}$$

est nulle. Donc $\mathrm{cn}\,u$ aura une expression analogue à celle de $\mathrm{dn}\,u$, le dénominateur étant le même et le numérateur étant la limite du produit

$$\prod \left[1 - \frac{u}{(2m+1)\mathrm{K} + 2ni\mathrm{K}'}\right].$$

Chaque facteur simple de ce dernier produit diffère du facteur correspondant de $\Theta_3(u)$ par le changement de $2n+1$ en $2n$. Le produit aura donc pour expression

$$(3) \qquad \lim_{n=\infty} \prod_{-n}^{+n} \frac{\cos(x - 2ni\rho)}{\cos 2ni\rho},$$

ou, en groupant les facteurs deux à deux,

$$\Theta_2(u) = \cos x \prod_{1}^{\infty} \left(1 - \frac{\sin^2 x}{\mathrm{Ch}^2\, 2n\rho}\right).$$

1329. La fonction $\mathrm{sn}\,u$ s'annulant avec u, nous commencerons par chercher le développement de la fonction $\frac{\mathrm{sn}(u+u_0)}{\mathrm{sn}\,u_0}$ et nous en déterminerons la limite pour $u_0 = 0$.

Les zéros de cette fonction sont donnés par la formule

$$v = -u_0 + 2m\mathrm{K} + 2ni\mathrm{K}',$$

et, par suite, le numérateur de $\frac{\mathrm{sn}(u+u_0)}{\mathrm{sn}\,u_0}$ sera la limite du produit

$$\prod \left(1 - \frac{u}{-u_0 + 2m\mathrm{K} + 2ni\mathrm{K}'}\right).$$

En remplaçant, dans la formule du n° **1216**, II, x_0 pa

$$\eta(-u_0 - \mathrm{K} + 2ni\mathrm{K}') = -x_0 - \frac{\pi}{2} + 2ni\rho;$$

on verra que ce produit représente, pour n constant, la fonction

$$\frac{\cos\left(x + x_0 + \frac{\pi}{2} - 2ni\rho\right)}{\cos\left(x_0 + \frac{\pi}{2} - 2ni\rho\right)} = \frac{\sin(x + x_0 - 2ni\rho)}{\sin(x_0 - 2ni\rho)}.$$

Donc le numérateur de $\frac{\operatorname{sn}(u + u_0)}{\operatorname{sn} u_0}$ sera la limite, pour n infini, du produit

(4) $$\prod_{-n}^{+n} \frac{\sin(x + x_0 - 2ni\rho)}{\sin(x_0 - 2ni\rho)}.$$

Groupons, dans ce produit, les facteurs deux à deux ; on aura, en mettant à part le facteur correspondant à $n = 0$, le numérateur de $\frac{\operatorname{sn}(u + u_0)}{\operatorname{sn} u_0}$ égal à

$$\frac{\sin(x + x_0)}{\sin x_0} \prod_{1}^{\infty} \left[1 + \frac{\sin^2(x + x_0)}{\operatorname{Sh}^2 2n\rho}\right].$$

Or il est facile de voir que, si l'on fait tendre u_0 vers zéro, le rapport

$$\frac{\operatorname{sn} u_0}{\sin x_0} = \frac{\operatorname{sn} u_0}{\sin \eta u_0}$$

tendra vers la limite $\frac{1}{\eta}$. Donc le numérateur de $\operatorname{sn}(u + u_0)$, lorsqu'on y fait $u_0 = 0$, devient égal à

$$\Theta_1(u) = \frac{1}{\eta} \sin x \prod_{1}^{\infty} \left(1 + \frac{\sin^2 x}{\operatorname{Sh}^2 2n\rho}\right).$$

Le dénominateur de $\operatorname{sn} u$ est encore la même fonction $\Theta(u)$ que pour les développements précédents.

Le développement de $\operatorname{tn} u = \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u}$ se tirera immédiatement des deux précédents.

1330. D'après ce que nous venons de voir, les fonctions elliptiques $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$, $\operatorname{tn} u$ s'expriment au moyen des quatre fonc-

tions synectiques

$$(5)\quad \begin{cases} \Theta\,(u) = \prod_0^\infty \left[1 + \dfrac{\sin^2 x}{\text{Sh}^2(2n+1)\rho}\right], \\ \Theta_1(u) = \dfrac{1}{\eta}\sin x \prod_1^\infty \left(1 + \dfrac{\sin^2 x}{\text{Sh}^2 2n\rho}\right), \\ \Theta_2(u) = \cos x \prod_1^\infty \left(1 - \dfrac{\sin^2 x}{\text{Ch}^2 2n\rho}\right), \\ \Theta_3(u) = \prod_0^\infty \left[1 - \dfrac{\sin^2 x}{\text{Ch}^2(2n+1)\rho}\right], \end{cases}$$

qui sont, à des facteurs constants près, les quatre *fonctions* ϑ de Jacobi, et l'on a ainsi les formules

$$(6)\quad \begin{cases} \text{sn}\,u = \text{sn}\,\dfrac{2Kx}{\pi} = \dfrac{\Theta_1(u)}{\Theta(u)}, \\ \text{cn}\,u = \text{cn}\,\dfrac{2Kx}{\pi} = \dfrac{\Theta_2(u)}{\Theta(u)}, \\ \text{dn}\,u = \text{dn}\,\dfrac{2Kx}{\pi} = \dfrac{\Theta_3(u)}{\Theta(u)}, \\ \text{tn}\,u = \text{tn}\,\dfrac{2Kx}{\pi} = \dfrac{\Theta_1(u)}{\Theta_2(u)}. \end{cases}$$

Les formules (25) du n° 1317 donnent, par conséquent,

$$(7)\quad \begin{cases} \text{snc}\,u = \text{sn}\,\dfrac{2K}{\pi}\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \dfrac{\Theta_2(u)}{\Theta_3(u)}, \\ \text{cnc}\,u = \text{cn}\,\dfrac{2K}{\pi}\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = k'\,\dfrac{\Theta_1(u)}{\Theta_3(u)}, \\ \text{dnc}\,u = \text{dn}\,\dfrac{2K}{\pi}\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = k'\,\dfrac{\Theta(u)}{\Theta_3(u)}, \\ \text{tnc}\,u = \text{tn}\,\dfrac{2K}{\pi}\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \dfrac{1}{k'}\,\dfrac{\Theta_2(u)}{\Theta_1(u)}. \end{cases}$$

Si l'on pose

$$q = e^{-2\rho},$$

les quatre fonctions Θ se présenteront sous la forme

$$(8)\quad \begin{cases} \Theta\,(u) = \prod_0^\infty \dfrac{1 - 2q^{2n+1}\cos 2x + q^{4n+2}}{(1-q^{2n+1})^2}, \\ \Theta_1(u) = \dfrac{1}{\eta}\sin x \prod_1^\infty \dfrac{1 - 2q^{2n}\cos 2x + q^{4n}}{(1-q^{2n})^2}, \\ \Theta_2(u) = \cos x \prod_1^\infty \dfrac{1 + 2q^{2n}\cos 2x + q^{4n}}{(1+q^{2n})^2}, \\ \Theta_3(u) = \prod_0^\infty \dfrac{1 + 2q^{2n+1}\cos 2x + q^{4n+2}}{(1+q^{2n+1})^2}. \end{cases}$$

1331. Les valeurs des fonctions Θ données par les formules (1), (2), (3), (4) présentent des avantages pour l'étude des propriétés de ces fonctions. Dans les deux premières, l'indice n varie entre les deux valeurs infiniment grandes $-n-1$ et $+n$; dans les deux dernières, il varie entre $-n$ et $+n$.

Pour ramener l'indice de celles-ci aux mêmes limites que celui des deux premières, il suffit de multiplier et de diviser les expressions (3) et (4) par le facteur qui a pour indice $-n-1$.

Dans la formule (3), ce facteur a pour valeur

$$\frac{\cos[x + (2n+2)i\rho]}{\cos(2n+2)i\rho} = \frac{e^{(2n+2)\rho - ix} + e^{-(2n+2)\rho + ix}}{e^{(2n+2)\rho} + e^{-(2n+2)\rho}},$$

expression qui, pour n infini, tend vers la valeur e^{-ix}. Donc on aura

$$\Theta_2(u) = e^{ix}\lim \prod_{-n-1}^{+n} \frac{\cos(x - 2ni\rho)}{\cos 2ni\rho}.$$

Si, dans la formule (4), on convient de remplacer le facteur correspondant à $n = 0$ par $-\eta$, et qu'on multiplie et divise par le facteur

$$\lim \frac{\sin[x + x_0 + (2n+2)i\rho]}{\sin[x_0 + (2n+2)i\rho]} = e^{-ix},$$

on aura, en faisant $x_0 = 0$,

$$\Theta_1(u) = e^{ix} \lim \prod_{-n-1}^{+n} \frac{\sin(x - 2ni\rho)}{\sin 2ni\rho}.$$

De cette manière, les quatre fonctions Θ seront déterminées par les formules

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} \Theta\ (u) &= \lim \prod_{-n-1}^{+n} \frac{\cos\left[x + \frac{\pi}{2} - (2n+1)i\rho\right]}{\cos\left[\frac{\pi}{2} - (2n+1)i\rho\right]}, \\ \Theta_1(u) &= e^{ix} \lim \prod_{-n-1}^{+n} \frac{\cos\left(x + \frac{\pi}{2} - 2ni\rho\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2ni\rho\right)}, \\ \Theta_2(u) &= e^{ix} \lim \prod_{-n-1}^{+n} \frac{\cos(x - 2ni\rho)}{\cos 2ni\rho}, \\ \Theta_3(u) &= \lim \prod_{-n-1}^{+n} \frac{\cos[x - (2n+1)i\rho]}{\cos(2n+1)i\rho}, \end{aligned} \right.$$

où l'on pourra, pour abréger, omettre le mot lim.

Si l'on pose, en général,

$$(10) \quad \Theta_{\mu,\nu}(u) = e^{\nu ix} \lim \prod_{-n-1}^{+n} \frac{\cos\left[x + \mu\frac{\pi}{2} - (2n+1-\nu)i\rho\right]}{\cos\left[\mu\frac{\pi}{2} - (2n+1-\nu)i\rho\right]},$$

les quatre fonctions (9),

$$\Theta(u),\ \Theta_1(u),\ \Theta_2(u),\ \Theta_3(u),$$

pourront être représentées respectivement par les notations

$$\Theta_{1,0}(u),\ \Theta_{1,1}(u),\ \Theta_{0,1}(u),\ \Theta_{0,0}(u),$$

de sorte que les indices simples

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad 3$$

équivaudront aux doubles indices

$$(1,0),\ (1,1),\ (0,1),\ (0,0).$$

1332. *Propriétés des fonctions* Θ. — Considérons la forme générale

$$\Theta_{\mu,\nu}(u) = \Theta_{\mu,\nu}\left(\frac{2Kx}{\pi}\right) = e^{\nu ix} \prod_{-n-1}^{+n} \frac{\cos\left[x + \mu\frac{\pi}{2} - (2n+1-\nu)i\rho\right]}{\cos\left[\mu\frac{\pi}{2} - (2n+1-\nu)i\rho\right]}.$$

Si l'on fait varier les indices entiers μ, ν, il est aisé de voir que les valeurs obtenues seront toujours les mêmes que les quatre valeurs précédentes, qui correspondent à μ et ν égaux à 0 ou à 1.

En effet, si l'on change μ en $\mu + 2$, chacun des arcs, au numérateur et au dénominateur, augmente de π, et, par suite, le quotient

$$\frac{\cos\left[x + \mu\frac{\pi}{2} + \ldots\right]}{\cos\left[\mu\frac{\pi}{2} + \ldots\right]}$$

n'aura pas varié. Donc

$$\Theta_{\mu+2,\nu}(u) = \Theta_{\mu,\nu}(u).$$

Si l'on remplace maintenant ν par $\nu + 2$, l'arc de chaque cosinus varie de $2i\rho$, ce qui revient à changer n en $n - 1$. Le dernier facteur, à la limite supérieure, est ainsi remplacé par

$$\frac{\cos\left[x + \mu\frac{\pi}{2} - (2n-1-\nu)i\rho\right]}{\cos\left[\mu\frac{\pi}{2} - (2n-1-\nu)i\rho\right]},$$

et le dernier, à la limite inférieure, savoir

$$\frac{\cos\left[x + \mu\frac{\pi}{2} + (2n+3+\nu)i\rho\right]}{\cos\left[\mu\frac{\pi}{2} + (2n+3+\nu)i\rho\right]},$$

est remplacé par

$$\frac{\cos\left[x + \mu\frac{\pi}{2} + (2n+5+\nu)i\rho\right]}{\cos\left[\mu\frac{\pi}{2} + (2n+5+\nu)i\rho\right]}.$$

Donc le produit $\prod_{-n-1}^{+n}$ se trouvera multiplié par

$$\frac{\cos\left[x+\mu\frac{\pi}{2}+(2n+5+\nu)i\rho\right]}{\cos\left[x+\mu\frac{\pi}{2}-(2n+1-\nu)i\rho\right]}\;\frac{\cos\left[\mu\frac{\pi}{2}-(2n+1-\nu)i\rho\right]}{\cos\left[\mu\frac{\pi}{2}+(2n+5+\nu)i\rho\right]},$$

expression qui tend, pour n infini, vers la limite

$$e^{-2ix}.$$

Or, par le changement de ν en $\nu+2$, le facteur $e^{\nu ix}$, en avant du signe Π, sera en même temps multiplié par e^{2ix}. Donc le produit total n'aura pas changé de valeur, et l'on aura ainsi

$$\Theta_{\mu,\nu+2}(u)=\Theta_{\mu,\nu}(u).$$

On pourra donc, sans diminuer la généralité de la fonction $\Theta_{\mu,\nu}$, la ramener toujours aux quatre formes considérées dans les numéros précédents.

1333. On voit immédiatement que les trois fonctions $\Theta_{1,0}$, $\Theta_{0,1}$, $\Theta_{0,0}$ sont paires, tandis que la fonction $\Theta_{1,1}$ est impaire. On aura donc, en général,

$$\Theta_{\mu,\nu}(-u)=(-1)^{\mu\nu}\Theta_{\mu,\nu}(u). \tag{11}$$

Les facteurs du produit $\prod_{-n-1}^{+n}$ étant en nombre pair, on ne change pas le signe du produit lorsqu'on augmente x de π, ou u de $2K$, ce qui ne fait que multiplier chaque facteur par -1. Le facteur $e^{\nu ix}$ se trouve multiplié par $e^{\nu i\pi}=(-1)^{\nu}$. Donc

$$\Theta_{\mu,\nu}(u+2K)=(-1)^{\nu}\Theta_{\mu,\nu}(u). \tag{12}$$

Augmentons maintenant u de $2iK'$, ou x de $2i\rho$; le produit $\prod_{-n-1}^{n}$ sera multiplié par un facteur de la forme

$$\frac{\cos[X+(n+3)i\rho]}{\cos(X-ni\rho)},$$

dont la limite, pour n infini, est $e^{-2i(X+i\rho)}$. Le facteur $e^{\nu ix}$ est multiplié par $e^{-2\nu\rho}$. Donc

$$\Theta_{\mu,\nu}(u+2iK')=e^{-2iX-2(1-\nu)\rho}\Theta_{\mu,\nu}(u).$$

On a, pour $\mu=1$, $e^{-2iX}=-e^{-2ix}$, et pour $\mu=0$, $e^{-2iX}=+e^{-2ix}$. Donc

$$(13)\quad \Theta_{\mu,\nu}(u+2iK')=(-1)^{\mu}e^{-2ix+2\rho}\Theta_{\mu,\nu}(u)=(-1)^{\mu}\frac{e^{-2ix}}{q}\Theta_{\mu,\nu}(u).$$

En appliquant cette formule à chacune des quatre fonctions Θ, on aura les égalités

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\Theta(u+2iK')}{-\Theta(u)}=\frac{\Theta_1(u+2iK')}{-\Theta_1(u)}=\frac{\Theta_2(u+iK')}{\Theta_2(u)}=\frac{\Theta_3(u+iK')}{\Theta_3(u)}\\ &\qquad=e^{-2ix+2\rho}=\frac{1}{q}e^{-2ix}.\end{aligned}\right.$$

Cela montre que les fonctions Θ ne sont pas périodiques relativement à $2iK'$; quand on augmente de cette constante l'argument u, ces fonctions se reproduisent à un facteur exponentiel près.

1334. Si dans $\Theta_{\mu,\nu}$ on remplace u par $u+K$, ou x par $x+\frac{\pi}{2}$, il viendra

$$\Theta_{\mu,\nu}(u+K)=e^{\nu i\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}\prod_{-n-1}^{+n}\frac{\cos\left[x+(\mu+1)\frac{\pi}{2}-(2n+1-\nu)i\rho\right]}{\cos\left[\mu\frac{\pi}{2}-(2n+1-\nu)\rho\right]}.$$

En comparant cette valeur à celle de $\Theta_{\mu+1,\nu}$, on voit qu'elle n'en diffère que par le facteur constant $e^{\nu i\frac{\pi}{2}}$ et par le dénominateur, qui est pareillement constant. Donc le quotient $\frac{\Theta_{1,\nu}(u+K)}{\Theta_{0,\nu}(u)}$ est constant, ce qui donne les deux relations

$$\frac{\Theta_3(u+K)}{\Theta(u)}=\text{const.},\qquad \frac{\Theta_2(u+K)}{\Theta_1(u)}=\text{const.}$$

Pour obtenir les valeurs de ces constantes, nous remarquerons d'abord que, les deux fonctions Θ et Θ_3 prenant la valeur 1 pour

$u=0$, le rapport $\dfrac{\Theta_3(u+K)}{\Theta(u)}$ doit se réduire, pour $u=0$, à $\Theta_3(K)$, et, pour $u=-K$, à $\dfrac{1}{\Theta(K)}$. De plus, à cause de

$$\operatorname{sn} K = \frac{\Theta_1(K)}{\Theta(K)} = 1,$$

on en conclut

$$\Theta_1(K) = \Theta(K).$$

Enfin

$$\operatorname{dn} K = \frac{\Theta_3(K)}{\Theta(K)} = [\Theta_3(K)]^2 = k'.$$

Donc

$$(15) \qquad \Theta_3(K) = \frac{1}{\Theta(K)} = \frac{1}{\Theta_1(K)} = \sqrt{k'},$$

et par suite

$$(16) \qquad \frac{\Theta_3(u+K)}{\Theta(u)} = \frac{\Theta_2(u+K)}{-\Theta_1(K)} = \sqrt{k'},$$

ou encore

$$(17) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\Theta_3(K-u)}{\Theta(u)} &= \frac{\Theta_2(K-u)}{\Theta_1(u)} = \sqrt{k'}, \\ \frac{\Theta(K-u)}{\Theta_3(u)} &= \frac{\Theta_1(K-u)}{\Theta_2(u)} = \frac{1}{\sqrt{k'}}. \end{aligned} \right.$$

Ainsi, quand on remplace u par son *complément* $K-u$, ou x par $\frac{\pi}{2}-x$, les fonctions Θ et Θ_3, Θ_1 et Θ_2 s'échangent entre elles, à un facteur constant près.

1335. Si l'on remplace maintenant u par $u+iK'$, ou x par $x+i\rho$, on a

$$\Theta_3(u+iK') = \prod_{-n-1}^{+n} \frac{\cos(x-2ni\rho)}{\cos(2n+1)i\rho},$$

$$\Theta(u+iK') = \prod_{-n-1}^{+n} \frac{\cos\left(x+\frac{\pi}{2}-2ni\rho\right)}{\cos\left[\frac{\pi}{2}-(2n+1)i\rho\right]}.$$

Donc les rapports

$$\frac{\Theta_3(u+i\mathrm{K}')}{e^{-ix}\Theta_2(u)}, \quad \frac{\Theta(u+i\mathrm{K}')}{e^{-ix}\Theta_1(u)}$$

sont constants.

En faisant $u=0$, puis $u=-i\mathrm{K}'$, on trouve que le premier de ces rapports est égal à

$$\Theta_3(i\mathrm{K}')=\frac{e^{\rho}}{\Theta_2(i\mathrm{K}')},$$

et le second à

$$\frac{e^{\rho}}{\Theta_1(i\mathrm{K}')}.$$

L'égalité

$$\frac{\Theta_1(i\mathrm{K}')}{\Theta_2(i\mathrm{K}')}=\operatorname{tn} i\mathrm{K}'=i$$

donne

$$\Theta_1(i\mathrm{K}')=i\,\Theta_2(i\mathrm{K}').$$

D'ailleurs, si dans l'égalité [1330]

$$\operatorname{sn}(\mathrm{K}-u)=\frac{\Theta_2(u)}{\Theta_3(u)}$$

on fait $u=-i\mathrm{K}'$, il viendra [1318]

$$\frac{\Theta_2(i\mathrm{K}')}{\Theta_3(i\mathrm{K}')}=\frac{e^{\rho}}{[\Theta_3(i\mathrm{K}')]^2}=\operatorname{sn}(\mathrm{K}+i\mathrm{K}')=\frac{1}{k}.$$

De là résultent les égalités

$$(18)\qquad \Theta_3(i\mathrm{K}')=e^{\frac{1}{2}\rho}\sqrt{k}, \quad \Theta_2(i\mathrm{K}')=\frac{e^{\frac{1}{2}\rho}}{\sqrt{k}}, \quad \Theta_1(i\mathrm{K}')=\frac{ie^{\frac{1}{2}\rho}}{\sqrt{k}},$$

d'où l'on conclut les suivantes :

$$(19)\qquad \frac{\Theta(u+i\mathrm{K}')}{i\,\Theta_1(u)}=\frac{\Theta_3(u+i\mathrm{K}')}{\Theta_2(u)}=\sqrt{k}.e^{-ix+\frac{1}{2}\rho}.$$

En remplaçant u par $u-i\mathrm{K}'$ dans les formules (14) du n° 1333 et dans celles que nous venons d'écrire, nous obtiendrons les relations

$$(20)\qquad \begin{cases} \dfrac{\Theta_2(u+i\mathrm{K}')}{\Theta_2(u-i\mathrm{K}')}=\dfrac{-\Theta_1(u-i\mathrm{K}')}{\Theta_1(u+i\mathrm{K}')}=e^{-2ix}, \\[2ex] \dfrac{\Theta_2(u-i\mathrm{K}')}{\Theta_3(u)}=\dfrac{\Theta(u)}{i\,\Theta_1(u-i\mathrm{K}')}=\sqrt{k}.e^{-ix-\frac{1}{2}\rho}. \end{cases}$$

On tire de là

$$(21)\qquad \frac{\Theta_2(u+i\mathrm{K}')}{\Theta_3(u)} = \frac{\Theta_1(u+i\mathrm{K}')}{i\Theta(u)} = \frac{1}{\sqrt{k}} e^{-ix+\frac{1}{2}\rho}.$$

Ainsi, quand on ajoute $i\mathrm{K}'$ à l'argument u, les fonctions Θ et Θ_1, ainsi que les fonctions Θ_2 et Θ_3, s'échangent entre elles, à un facteur exponentiel près.

De ces diverses relations il résulte que les quatre fonctions Θ peuvent s'exprimer au moyen d'une seule d'entre elles, de Θ_3 par exemple. On a, en effet,

$$(22)\qquad \begin{cases} \Theta(u) = \dfrac{1}{\sqrt{k'}}\Theta_3(\mathrm{K}-u), \\ \Theta_1(u) = \dfrac{i}{\sqrt{kk'}} e^{-ix-\frac{1}{2}\rho}\Theta_3(\mathrm{K}+i\mathrm{K}'-u), \\ \Theta_2(u) = \dfrac{1}{\sqrt{k}} e^{-ix-\frac{1}{2}\rho}\Theta_3(i\mathrm{K}'-u). \end{cases}$$

1336. On peut déduire de là les valeurs du module k et du quadrant K en fonction de ρ ou du rapport $\frac{2i\mathrm{K}'}{4\mathrm{K}}$ des deux périodes des fonctions elliptiques.

En faisant $u = i\mathrm{K}'$ ou $x = i\rho$ dans la valeur (5) de $\Theta_3(u)$ [1330], il vient

$$\Theta_3(i\mathrm{K}') = \prod_0^\infty \left[1 + \frac{\mathrm{Sh}^2\rho}{\mathrm{Ch}^2(2n+1)\rho}\right],$$

ou, en vertu de l'égalité $\mathrm{Ch}^2\sigma + \mathrm{Sh}^2\rho = \mathrm{Ch}(\sigma+\rho)\,\mathrm{Ch}(\sigma-\rho)$,

$$\Theta_3(i\mathrm{K}') = \prod_0^\infty \frac{\mathrm{Ch}(2n+2)\rho\,\mathrm{Ch}\,2n\rho}{\mathrm{Ch}^2(2n+1)\rho} = \prod_0^\infty \frac{(1+q^{2n+2})(1+q^{2n})}{(1+q^{2n+1})^2},$$

ou enfin, en introduisant au numérateur le facteur $1+q^{2n+1}$, égal à l'unité pour n infini, et faisant sortir du signe Π le facteur $1+q^0 = 2$,

$$(23)\qquad \Theta_3(i\mathrm{K}') = 2\prod_0^\infty \left(\frac{1+q^{2n+2}}{1+q^{2n+1}}\right)^2.$$

Donc, en vertu des formules du numéro précédent, on a

$$(24)\qquad \sqrt{k} = e^{-\frac{1}{2}\rho}\,\Theta_3(i\mathrm{K}') = \sqrt[4]{q}\,.\,\Theta_3(i\mathrm{K}') = 2\sqrt[4]{q}\prod_0^\infty\left(\frac{1+q^{2n+2}}{1+q^{2n+1}}\right)^2.$$

La formule (15) du n° 1334 donne immédiatement

$$(25)\qquad \sqrt{k'} = \Theta_3(\mathrm{K}) = \prod_0\left(\frac{1-q^{2n+1}}{1+q^{2n+1}}\right)^2.$$

Elle donne encore l'équation

$$(26)\qquad \frac{1}{\sqrt{k'}} = \Theta_1(\mathrm{K}) = \frac{1}{\eta}\prod_1^\infty\left(\frac{1+q^{2n}}{1-q^{2n}}\right)^2.$$

Par la combinaison de ces formules, on peut en obtenir un grand nombre d'autres, dont quelques-unes nous seront utiles plus tard.

Si nous posons, pour abréger,

$$(27)\qquad \left\{\begin{array}{ll} \mathrm{M} = \prod_1^\infty(1+q^{2n}), & \mathrm{M}' = \prod_0^\infty(1+q^{2n+1}), \\ \mathrm{N} = \prod_1^\infty(1-q^{2n}), & \mathrm{N}' = \prod_0^\infty(1-q^{2n-1}), \end{array}\right.$$

on aura d'abord

$$\mathrm{MM}' = \prod_0^\infty(1+q^n), \quad \mathrm{NN}' = \prod_0^\infty(1-q^n),$$

d'où

$$\mathrm{MM'NN'} = \prod_0^\infty(1-q^{2n}) = \mathrm{N},$$

d'où résulte la relation

$$(28)\qquad \mathrm{MM'N'} = 1.$$

Des relations (24), (25), (26), mises sous la forme

$$\frac{2\sqrt[4]{q}}{\sqrt{k}} = \frac{\mathrm{M}'^2}{\mathrm{M}^2}, \quad \frac{1}{\sqrt{k'}} = \frac{\mathrm{M}'^2}{\mathrm{N}'^2}, \quad \frac{\eta}{\sqrt{k'}} = \frac{\mathrm{M}^2}{\mathrm{N}^2},$$

on tire

$$\frac{2\sqrt[4]{q}\cdot\eta}{\sqrt{kk'}} = \frac{M'^2}{N^2} = \frac{N'^2}{N^2}\frac{1}{\sqrt{k'}},$$

d'où

$$(29)\qquad \frac{2\sqrt[4]{q}\cdot\eta}{\sqrt{kk'}}\prod_1^\infty(1-q^{2n})^2 = \frac{1}{\sqrt{k'}}\prod_0^\infty(1-q^{2n+1})^2.$$

On a encore

$$(30)\quad \frac{1}{\sqrt{\eta}} = \frac{M'N}{MN'} = \frac{M'N.MM'N'}{MN'} = M'^2N = \prod_0^\infty(1+q^{2n+1})^2(1-q^{2n+2}).$$

1337. Nous avons obtenu, dans le numéro précédent, les développements des fonctions Θ en produits simples, en commençant par grouper ensemble les facteurs correspondants aux points critiques situés sur une même ligne horizontale. En commençant par grouper les facteurs dans un autre ordre, on obtiendra d'autres fonctions Θ′, jouant les mêmes rôles que les fonctions Θ, mais de forme différente.

Considérons de nouveau le double produit [1327]

$$\prod_{m,n}\left[1-\frac{u}{(2m+1)K+(2n+1)iK'}\right],$$

et posons cette fois

$$\eta' = \frac{\pi}{2K'},\quad x' = \eta' u,\quad \rho' = \eta' K,\quad x'_0 = \eta'(2m+1)K = (2m+1)\rho'.$$

La fonction $\Theta_3(u)$ prendra la forme

$$(31)\ \left\{\begin{aligned}\Theta'_3(u) &= \prod_{-m-1}^{+m}\frac{\cos i[x'-(2m+1)\rho']}{\cos(2m+1)i\rho'} = \prod_{-m-1}^{+m}\frac{\mathrm{Ch}[x'-(2m+1)\rho']}{\mathrm{Ch}(2m+1)\rho'}\\ &= \prod_0^\infty\left[1-\frac{\sin^2 ix'}{\cos^2(2m+1)i\rho'}\right] = \prod_0^\infty\left[1+\frac{\mathrm{Sh}^2 x'}{\mathrm{Ch}^2(2m+1)\rho'}\right].\end{aligned}\right.$$

En comparant cette valeur avec celle que nous avons précédemment obtenue pour le même double produit, on voit que l'expres-

sion de $\Theta'_3(u)$ est ce que devient celle de $\Theta_3(u)$ lorsqu'on y remplace x et ρ par ix' et ρ'.

Si l'on change maintenant u en $u+K$, ou x' en $x'+\rho'$, en faisant

$$x'-x'_0=\eta'(u-2mK),\quad x'_0=2m\rho',$$

il viendra

$$(32)\left\{\begin{aligned}\Theta'(u)&=\prod_{-m}^{+m}\frac{\cos i(x'-2m\rho')}{\cos 2mi\rho'}=\cos ix'\prod_{1}^{\infty}\left(1-\frac{\sin^2 ix'}{\cos^2 2mi\rho'}\right)\\&=\operatorname{Ch}x'\prod_{1}^{\infty}\left(1+\frac{\operatorname{Sh}^2 x'}{\operatorname{Ch}^2 2m\rho'}\right).\end{aligned}\right.$$

Donc $\Theta'(u)$ est égal à la valeur de $\Theta_2(u)$, dans laquelle on remplacerait x et ρ par ix' et ρ'.

Le double produit

$$\prod_{m,n}\left[1-\frac{u}{(2m+1)K+2niK'}\right]$$

peut s'écrire sous la forme

$$(33)\left\{\begin{aligned}\Theta'_2(u)&=\prod_{m,n}\frac{\frac{x'}{i}-(2m+1)\frac{\rho'}{i}-2n\frac{\pi}{2}}{-(2m+1)\frac{\rho'}{i}-2n\frac{\pi}{2}}\\&=\prod_{-m-1}^{+m}\frac{\cos\left[\frac{x'}{i}+\frac{\pi}{2}-(2m+1)\frac{\rho'}{i}\right]}{\cos\left[\frac{\pi}{2}-(2m+1)\frac{\rho'}{i}\right]}=-\prod_{-m-1}^{+m}\frac{\sin i[x-(2m+1)\rho']}{\sin(2m+1)i\rho'}\\&=\prod_{0}^{\infty}\left[1-\frac{\sin^2 ix'}{\sin^2(2m+1)i\rho'}\right]=\prod_{0}^{\infty}\left[1-\frac{\operatorname{Sh}^2 x'}{\operatorname{Sh}^2(2m+1)\rho'}\right].\end{aligned}\right.$$

Donc $\Theta'_2(u)$ est égal à ce que devient $\Theta(u)$ par le changement de x, ρ en ix', ρ'.

Si l'on considère enfin le numérateur du développement de

$\dfrac{\operatorname{sn}(u+u_0)}{\operatorname{sn} u_0}$, en y introduisant x' et ρ', il vient

$$\prod_{m,n} \frac{u+u_0-2m\mathrm{K}-2ni\mathrm{K}'}{u_0-2m\mathrm{K}-2ni\mathrm{K}'} = \prod_{m,n} \frac{\dfrac{x'}{i}+\dfrac{x'_0}{i}-2m\dfrac{\rho'}{i}-2n\dfrac{\pi}{2}}{\dfrac{x'_0}{i}-2m\dfrac{\rho'}{i}-2n\dfrac{\pi}{2}}$$

$$= \prod_{-m}^{+m} \frac{\sin\frac{1}{i}(x'+x'_0-2m\rho')}{\sin\frac{1}{i}(x'_0-2m\rho')} = \frac{\sin\dfrac{x'+x'_0}{i}}{\sin\dfrac{x'_0}{i}} \prod_{1}^{\infty} \frac{\sin\frac{1}{i}(x'+x'_0-2m\rho')}{\sin\frac{1}{i}(x'_0-2m\rho')},$$

d'où l'on conclut, comme plus haut,

$$(34)\quad \Theta'_1(u) = \frac{1}{i\eta'}\sin ix' \prod_{1}^{\infty}\left(1-\frac{\sin^2 ix'}{\sin^2 2mi\rho'}\right) = \frac{1}{\eta'}\operatorname{Sh} x' \prod_{1}^{\infty}\left(1-\frac{\operatorname{Sh}^2 x'}{\operatorname{Sh}^2 2m\rho'}\right).$$

La fonction $\Theta'_1(u)$ est donc, à un facteur constant près, ce que devient $\Theta_1(u)$ lorsqu'on y change x, ρ en ix', ρ'.

On peut encore donner à ces formules une forme analogue à celle des formules (9) du n° 1331, savoir,

$$(35)\quad \begin{cases} \Theta'(u) = e^{-x'} \lim \displaystyle\prod_{-m-1}^{+m} \frac{\cos(ix'-2mi\rho')}{\cos 2mi\rho'}, \\[2ex] \Theta'_1(u) = e^{-x'} \lim \displaystyle\prod_{-m-1}^{+m} \frac{\cos\left(ix'+\frac{\pi}{2}-2mi\rho'\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-2mi\rho'\right)}, \\[2ex] \Theta'_2(u) = \lim \displaystyle\prod_{-m-1}^{+m} \frac{\cos\left[ix'+\frac{\pi}{2}-(2m+1)i\rho'\right]}{\cos\left[\frac{\pi}{2}-(2m+1)i\rho'\right]}, \\[2ex] \Theta'_3(u) = \lim \displaystyle\prod_{-m-1}^{+m} \frac{\cos[ix'-(2m+1)i\rho']}{\cos(2m+1)i\rho'}, \end{cases}$$

en se rappelant que, dans la valeur de $\Theta'_1(u)$, on est convenu de remplacer, pour $m=0$, le facteur $\cos\left(\frac{\pi}{2}-2mi\rho'\right)$ par la valeur $-\eta'$.

On se rappellera que les quantités η, x, ρ, q, η', x', ρ', q' qui entrent dans ces formules sont données par les relations

$$(36)\quad \left\{\begin{aligned} &\eta = \frac{\pi}{2K}, \quad x = \eta u, \quad \rho = \eta K', \quad q = e^{-2\rho}, \\ &\eta' = \frac{\pi}{2K'}, \quad x' = \eta' u, \quad \rho' = \eta' K, \quad q' = e^{-2\rho'}, \end{aligned}\right.$$

d'où l'on tire

$$(37)\quad \frac{x'}{x} = \frac{\eta'}{\eta} = \frac{K}{K'} = \frac{\pi}{2\rho} = \frac{2\rho'}{\pi} = \sqrt{\frac{\rho'}{\rho}}, \quad \rho\rho' = \frac{\pi^2}{4}.$$

1338. Si l'on pose généralement, comme au n° 1331,

$$\Theta'_{\mu,\nu}(u) = e^{-\nu x'} \lim \prod_{-m-1}^{+m} \frac{\cos\left[ix' + \mu\frac{\pi}{2} - (2m+1-\nu)i\rho'\right]}{\cos\left[\mu\frac{\pi}{2} - (2m+1-\nu)i\rho'\right]},$$

on trouvera une série de relations semblables à celles que nous avons établies pour la fonction $\Theta_{\mu,\nu}(u)$.

On aura d'abord les égalités

$$(38)\quad \Theta' = \Theta'_{0,1}, \quad \Theta'_1 = \Theta'_{1,1}, \quad \Theta'_2 = \Theta'_{1,0}, \quad \Theta'_3 = \Theta'_{0,0},$$

qui diffèrent de celles du n° 1331 par l'échange des indices μ, ν.

Il viendra ensuite

$$(39)\quad \left\{\begin{aligned} &\Theta'_{\mu,\nu}(-u) = (-1)^{\mu\nu}\Theta'_{\mu,\nu}(u), \\ &\Theta'_{\mu,\nu}(u+2iK') = (-1)^{\nu}\Theta'_{\mu,\nu}(u), \\ &\Theta'_{\mu,\nu}(u+2K) = (-1)^{\mu} e^{2x'+2\rho'}\Theta'_{\mu,\nu}(u). \end{aligned}\right.$$

1339. Nous allons chercher maintenant la relation qui existe entre les valeurs des fonctions $\Theta_{\mu,\nu}$ et $\Theta'_{\nu,\mu}$, qui jouent le même rôle dans les expressions (6) [1330] des fonctions elliptiques sn$u$, cn$u$, dn$u$, tn$u$, et dont les valeurs doivent être nécessairement proportionnelles.

Désignons par $\psi(u)$ la valeur commune des quatre rapports

$$\frac{\Theta'_{\nu,\mu}(u)}{\Theta_{\mu,\nu}(u)} \quad \text{ou} \quad \frac{\Theta'_\lambda(u)}{\Theta_\lambda(u)}.$$

Cette fonction est paire. De plus, elle ne devient ni nulle ni infinie pour aucune valeur finie de u, et se réduit à l'unité pour $u = 0$.

En vertu des formules des n°s 1333 et 1338, on a

$$\begin{aligned} \psi(u+2\mathrm{K}) &= e^{2x'+2\rho'}\psi(u), \\ \psi(u+2i\mathrm{K}') &= e^{2ix-2\rho}\psi(u), \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$(40)\qquad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{D}_u \log\psi(u+2\mathrm{K}) &= 2\eta' + \mathrm{D}_u\log\psi(u), \\ \mathrm{D}_u \log\psi(u+2i\mathrm{K}') &= 2i\eta + \mathrm{D}_u\log\psi(u), \end{aligned} \right.$$

et par suite

$$(41)\qquad \mathrm{D}_u^2 \log\psi(u+2\mathrm{K}) = \mathrm{D}_u^2\log\psi(u+2i\mathrm{K}') = \mathrm{D}_u^2\log\psi(u).$$

La fonction $\psi(u)$ étant uniforme et continue pour toute valeur de u, il en sera de même des deux fonctions

$$\begin{aligned} \mathrm{D}_u \log\psi(u) &= \frac{\psi'(u)}{\psi(u)}, \\ \mathrm{D}_u^2 \log\psi(u) &= \frac{\psi(u)\psi''(u) - [\psi'(u)]^2}{[\psi(u)]^2}. \end{aligned}$$

De plus, les égalités (41) expriment que la fonction $\mathrm{D}_u^2\log\psi(u)$ est doublement périodique, et, par conséquent, elle est encore finie pour $u = \infty$. Donc, d'après ce que nous avons démontré au n° 1137, elle se réduit à une constante.

On doit donc avoir, en intégrant,

$$\begin{aligned} \mathrm{D}^2 \log\psi(u) &= a, \\ \mathrm{D}_u \log\psi(u) &= au + b, \end{aligned}$$

a et b étant deux constantes. Mais la fonction $\mathrm{D}_u\log\psi(u)$, étant la dérivée logarithmique d'une fonction paire, est elle-même une fonction impaire [288], et, par suite, la constante b est nulle.

On déterminera maintenant a en observant que, d'après les équations (40), aux accroissements $2\mathrm{K}$, $2i\mathrm{K}'$ de u correspondent les accroissements $2\eta'$, $2i\eta$ de $\mathrm{D}_u\log\psi(u)$, accroissements qui, en vertu de l'équation

$$\mathrm{D}_u \log\psi(u) = au,$$

doivent être respectivement égaux à $2a\mathrm{K}$, $2ia\mathrm{K}'$. De l'une ou de

l'autre de ces conditions on tire

$$a = \frac{\pi}{2KK'}.$$

Donc

$$d\log\psi(u) = \frac{\pi}{2KK'}u\,du,$$

d'où, en intégrant et remarquant que $\psi(0) = 1$,

$$\psi(u) = e^{\frac{\pi u^2}{4KK'}}.$$

Par conséquent,

$$\Theta'_{\nu,\mu}(u) = e^{\frac{\pi u^2}{4KK'}}\Theta_{\mu,\nu}(u).$$

1340. Il existe une relation importante entre les fonctions Θ correspondantes aux modules complémentaires k et k'. Si l'on change u en iu, k en k', et par suite

$$\eta,\ \rho,\ x \quad \text{en} \quad \eta',\ \rho',\ ix',$$

la fonction $\Theta_{\mu,\nu}(u,k)$ deviendra [1332]

$$\Theta_{\mu,\nu}(iu,k') = e^{-\nu x'}\prod_{-n-1}^{+n}\frac{\cos\left[ix' + \mu\frac{\pi}{2} - (2n+1-\nu)i\rho'\right]}{\cos\left[\mu\frac{\pi}{2} - (2n+1-\nu)i\rho'\right]}$$

$$= \Theta'_{\mu,\nu}(iu,k) = e^{\frac{\pi u^2}{4KK'}}\Theta_{\nu,\mu}(u,k).$$

Donc

$$\Theta_{\mu,\nu}(u,k) = e^{\frac{\pi u^2}{4KK'}}\Theta_{\nu,\mu}(u,k'),$$

formule qui permet de ramener les Θ d'argument imaginaire aux Θ d'argument réel, et *vice versa*.

§ V.

DÉVELOPPEMENT DES PRODUITS INFINIS Θ EN SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES. — FONCTIONS ϑ.

1341. La fonction $\Theta_{\mu,\nu}(u)$ dépend de l'exponentielle

$$e^{i\frac{\pi u}{2K}} = e^{ix} = t;$$

elle est uniforme et continue pour toute valeur de cette variable t, car elle reste finie pour toutes les valeurs de t autres que celles qui rendent t infini, et elle admet, comme t, la période $4K$. Donc, en vertu du théorème de Laurent [1148], cette fonction est développable, pour toutes les valeurs de t, depuis zéro jusqu'à l'infini, en une série infinie dans les deux sens, et procédant suivant les puissances entières, positives et négatives de t.

Nous avons vu [1333] que, lorsqu'on remplace u par $u + 2K$, t se changeant en $-t$, $\Theta_{\mu,\nu}(u)$ est multiplié par $(-1)^\nu$, de sorte que l'on a

$$\Theta_{\mu,\nu}(-t) = (-1)^\nu \Theta_{\mu,\nu}(+t).$$

Donc, si $\nu = 0$, $\Theta_{\mu,0}$ sera une fonction paire de t, et son développement ne contiendra que des puissances paires de cette variable; si $\nu = 1$, $\Theta_{\mu,1}$ sera une fonction impaire, et son développement ne contiendra que des puissances impaires de t. La série sera donc généralement de la forme

$$\Theta_{\mu,\nu}(u) = \sum_{-\infty}^{+\infty} {}_m \, a_m e^{(2m+\nu)ix}.$$

La fonction $\Theta_{\mu,\nu}(u)$ étant réelle pour les valeurs réelles de x et de q, les coefficients a_m et $a_{-m-\nu}$, correspondants à deux puissances égales et opposées de e^{ix}, devront être égaux entre eux en valeur absolue.

Connaissant maintenant la forme du développement, il ne reste plus qu'à déterminer les coefficients, ce que nous pourrons faire par la méthode des coefficients indéterminés.

1342. Nous allons commencer par développer la fonction $\Theta_{0,0}(u)$

ou $\Theta_3(u)$, et de son développement nous tirerons aisément les développements des trois autres, en nous appuyant sur les formules des nos 1334 et 1335.

D'après ce que nous venons d'établir, le développement sera de la forme

$$\Theta_3(u) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_m e^{2mix}.$$

Si l'on change u en $u + 2i\mathrm{K}'$, on aura [1333]

$$\begin{aligned}\Theta_3(u + 2i\mathrm{K}') &= e^{-2ix+2\rho}\Theta_3(u) = \Sigma a_m e^{2\rho} e^{2(m-1)ix} \\ &= \Sigma a_m e^{2mix-4m\rho}\end{aligned}$$

ou, en introduisant $q = e^{-2\rho}$,

$$\Sigma a_m q^{-1} e^{2(m-1)ix} = \Sigma a_m q^{2m} e^{2mix}.$$

En égalant de part et d'autre les coefficients des mêmes puissances de e^{ix}, on aura, en général,

$$a_{m+1} q^{-1} = a_m q^{2m}, \quad \text{ou} \quad a_{m+1} = a_m q^{2m+1},$$

d'où l'on tire successivement

$$\begin{aligned} a_1 &= a_0 q, \\ a_2 &= a_1 q^3 = a_0 q^4, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_m &= a_{m-1} q^{2m-1} = a_0 q^{m^2}. \end{aligned}$$

Donc

$$\Theta_3(u) = a_0 \sum_{-\infty}^{+\infty} q^{m^2} e^{2mix} = a_0 \left(1 + 2\sum_{1}^{\infty} q^{m^2} \cos 2mx\right).$$

On a ensuite [1334, (16)], en changeant u en $u + \mathrm{K}$, x en $x + \frac{\pi}{2}$,

$$\begin{aligned}\Theta(u) = \frac{1}{\sqrt{k'}}\Theta_3(u+\mathrm{K}) &= \frac{a_0}{\sqrt{k'}} \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^m q^{m^2} e^{2mix} \\ &= \frac{a_0}{\sqrt{k'}}\left[1 + 2\sum_{1}^{+\infty} (-1)^m q^{m^2} e^{2mix}\right].\end{aligned}$$

Puis, par les formules (19) du n° 1335,

$$\Theta_2(u) = \frac{1}{\sqrt{k}} e^{ix - \frac{1}{2}\rho} \Theta_3(u + i\mathrm{K}') = \frac{a_0}{\sqrt{k}} e^{ix - \frac{1}{2}\rho} \sum_{-\infty}^{+\infty} q^{m^2} e^{2mix - 2m\rho}$$

$$= \frac{a_0}{\sqrt{k}} \sum_{-\infty}^{\infty} q^{\left(m+\frac{1}{2}\right)^2} e^{(2m+1)ix} = \frac{2a_0}{\sqrt{k}} \sum_{0}^{\infty} q^{\left(m+\frac{1}{2}\right)^2} \cos(2m+1)x.$$

Enfin les formules (17) du n° 1334 donnent

$$\Theta_1(u) = \frac{1}{\sqrt{k'}} \Theta_2(\mathrm{K} - u) = \frac{a_0}{\sqrt{kk'}} \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^m q^{\left(m+\frac{1}{2}\right)^2} e^{(2m+1)ix}$$

$$= \frac{2a_0}{\sqrt{kk'}} \sum_{0}^{\infty} (-1)^m q^{\left(m+\frac{1}{2}\right)^2} \sin(2m+1)x.$$

1343. Il nous reste à déterminer le facteur constant a_0, commun aux quatre fonctions Θ.

L'équation (29) du n° 1336 nous donne

$$\frac{2a_0 \eta q^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{kk'}} \prod_{1}^{\infty} (1 - q^{2n})^2 = \frac{a_0}{\sqrt{k'}} \prod_{0}^{\infty} (1 - q^{2n+1})^2.$$

Désignons par $\mathrm{P}(q)$ la valeur commune de ces deux expressions.

En comparant les valeurs [1331, (8)] de $\Theta(u)$ et de $\Theta_1(u)$ avec celles que nous venons de trouver, on aura les deux égalités

$$(1) \quad \begin{cases} \displaystyle\prod_{0}^{\infty} (1 - 2q^{2n+1}\cos 2x + q^{4n+2}) \\ \displaystyle\qquad = \mathrm{P}(q) \left[1 + 2\sum_{1}^{\infty} (-1)^m q^{m^2} \cos 2mx \right], \\ \displaystyle\sin x \prod_{1}^{\infty} (1 - 2q^{2n}\cos 2x + q^{4n}) \\ \displaystyle\qquad = \mathrm{P}(q) \sum_{0}^{\infty} (-1)^m q^{m^2+m} \sin(2m+1)x. \end{cases}$$

Les deux membres de chacune de ces deux égalités étant identiques, quelles que soient les valeurs de q et de x, elles subsiste-

ront lorsqu'on y remplacera q par q^2. En les multipliant membre à membre après cette substitution, et remarquant qu'alors le produit des premiers membres reproduit le premier membre de la seconde équation (1), il viendra

$$[P(q^2)]^2\left[1+2\sum_1^\infty(-1)^m q^{2m^2}\cos 2mx\right]\cdot\sum_0^\infty(-1)^m q^{2m^2+2m}\sin(2m+1)x$$
$$=P(q)\sum_0^\infty(-1)^m q^{m^2+m}\sin(2m+1)x.$$

En égalant dans les deux membres les coefficients de $\sin x$, on a

$$[P(q^2)]^2\sum_0^\infty q^{m^2+m}=P(q).$$

Si l'on fait $x=\frac{\pi}{2}$ dans la seconde égalité (1), elle donne

$$P(q)\sum_0^\infty q^{m^2+m}=\prod_1^\infty(1-q^{2n})^2.$$

Donc

$$\frac{P(q)}{P(q^2)}=\prod_1^\infty(1+q^{2n})=\prod_1^\infty\frac{1+q^{4n}}{1-q^{2n}},$$

et, par suite,

$$P(q)\prod_1^\infty(1-q^{2n})=P(q^2)\prod_1^\infty(1-q^{4n}).$$

La fonction $P(q)\prod_1^\infty(1-q^{2n})$ ne varie donc pas lorsqu'on y remplace q par q^2, et par suite aussi par q^4, q^8, ..., et finalement par $q^\infty=0$, puisque q est <1. Donc on aura dans ce cas

$$P(q)\prod_1^\infty(1-q^{2n})=P(0),$$

quantité égale à l'unité, en vertu de la première équation (1).

On aura, par conséquent,

$$\frac{a_0}{\sqrt{k'}} \prod_0^\infty (1 - q^{2n+1})^2 = \prod_1^\infty \frac{1}{1 - q^{2n}}.$$

On a d'ailleurs [1336, (30)], d'après les notations de ce numéro,

$$a_0 = \sqrt{k'} \frac{1}{\mathrm{NN}'^2} = \frac{\mathrm{N}'^2}{\mathrm{M}'^2} \frac{1}{\mathrm{NN}'^2} = \frac{1}{\mathrm{M}'^2 \mathrm{N}} = \sqrt{\eta}.$$

1344. Si nous posons maintenant, d'après les notations de Jacobi [1],

$$(2)\quad \begin{cases} \vartheta\,(x) = 1 + 2\sum_1^\infty (-1)^m q^{m^2} \cos 2mx, \\ \vartheta_1(x) = 2\sum_0^\infty (-1)^m q^{\left(m+\frac{1}{2}\right)^2} \sin(2m+1)x, \\ \vartheta_2(x) = 2\sum_0^\infty q^{\left(m+\frac{1}{2}\right)^2} \cos(2m+1)x, \\ \vartheta_3(x) = 1 + 2\sum_1^\infty q^{m^2} \cos 2mx, \end{cases}$$

les produits Θ auront pour expressions

$$(3)\quad \begin{cases} \Theta\,(u) = \sqrt{\frac{\eta}{k'}}\,\vartheta(x), \\ \Theta_1(u) = \sqrt{\frac{\eta}{kk'}}\,\vartheta_1(x), \\ \Theta_2(u) = \sqrt{\frac{\eta}{k}}\,\vartheta_2(x), \\ \Theta_3(u) = \sqrt{\eta}\,\vartheta_3(x). \end{cases}$$

En remplaçant dans ces formules les produits Θ par leurs valeurs (8) du n° 1330, et les constantes η, k, k' par leurs valeurs du n° 1336, on aura, pour les expressions des fonctions ϑ sous

---

(1) Dans les *Fundamenta*, Jacobi représente les fonctions $\vartheta(x)$, $\vartheta_1(x)$ par $\Theta(u)$, $\mathrm{H}(u)$, d'où l'on déduit

$$\vartheta_2(x) = \mathrm{H}(\mathrm{K} - u), \quad \vartheta_3(x) = \Theta(\mathrm{K} - u).$$

forme de produits infinis,

$$
(4)\quad \begin{cases}
\vartheta\,(x) = \prod_1^\infty(1-q^{2n}).\prod_0^\infty(1-2q^{2n+1}\cos 2x+q^{4n+2}),\\
\vartheta_1(x) = 2q^{\frac{1}{4}}\prod_1^\infty(1-q^{2n}).\sin x.\prod_1^\infty(1-2q^{2n}\cos 2x+q^{4n}),\\
\vartheta_2(x) = 2q^{\frac{1}{4}}\prod_1^\infty(1-q^{2n}).\cos x.\prod_1^\infty(1+2q^{2n}\cos 2x+q^{4n}),\\
\vartheta_3(x) = \prod_1^\infty(1-q^{2n}).\prod_0^\infty(1+2q^{2n+1}\cos 2x+q^{4n+2}).
\end{cases}
$$

D'après cela, les fonctions elliptiques s'exprimeront au moyen des fonctions ϑ par les formules suivantes :

$$
(5)\quad \begin{cases}
\operatorname{sn} u = \dfrac{1}{\sqrt{k}}\,\dfrac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)},\\
\operatorname{cn} u = \sqrt{\dfrac{k'}{k}}\,\dfrac{\vartheta_2(x)}{\vartheta(x)},\\
\operatorname{dn} u = \sqrt{k'}\,\dfrac{\vartheta_3(x)}{\vartheta(x)},\\
\operatorname{tn} u = \dfrac{1}{\sqrt{k'}}\,\dfrac{\vartheta_1(x)}{\vartheta_2(x)},
\end{cases}
\qquad
(6)\quad \begin{cases}
\operatorname{snc} u = \dfrac{1}{\sqrt{k}}\,\dfrac{\vartheta_2(x)}{\vartheta_3(x)},\\
\operatorname{cnc} u = \sqrt{\dfrac{k'}{k}}\,\dfrac{\vartheta_1(x)}{\vartheta_3(x)},\\
\operatorname{dnc} u = \sqrt{k'}\,\dfrac{\vartheta(x)}{\vartheta_3(x)},\\
\operatorname{tnc} u = \dfrac{1}{\sqrt{k'}}\,\dfrac{\vartheta_2(x)}{\vartheta_1(x)}.
\end{cases}
$$

Lorsque la constante ρ et la constante q qui en dépend seront remplacées par des quantités représentées par d'autres lettres, par exemple par ρ' ou q', on mettra ces lettres en évidence, et l'on écrira

$$\vartheta(x,\rho') \text{ ou } \vartheta(x,q'),\quad \vartheta_1(x,\rho') \text{ ou } \vartheta_1(x,q'),\quad \text{etc.}$$

Les fonctions ϑ, ϑ_2, ϑ_3 sont paires ; la fonction ϑ_1 est impaire.

1345. En substituant les valeurs (3) dans les formules obtenues aux nos **1335**, **1336**, **1337**, et posant, pour abréger,

$$(7)\qquad e^{-ix-\frac{1}{2}\rho} = q^{\frac{1}{4}}e^{-ix} = \xi,$$

on aura les relations

$$(8)\quad \begin{cases} \vartheta(x) = \vartheta_3\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = i\xi\vartheta_1(x - i\rho) = -i\xi\vartheta_2\left(x + \frac{\pi}{2} - i\rho\right), \\ \vartheta_1(x) = \vartheta_2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = i\xi\vartheta(x - i\rho) = \quad i\xi\vartheta_3\left(x + \frac{\pi}{2} - i\rho\right), \\ \vartheta_2(x) = \vartheta_1\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \xi\vartheta_3(x - i\rho) = \quad \xi\vartheta\left(x + \frac{\pi}{2} - i\rho\right), \\ \vartheta_3(x) = \vartheta\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \xi\vartheta_2(x - i\rho) = \quad \xi\vartheta_1\left(x + \frac{\pi}{2} - i\rho\right). \end{cases}$$

Pour $u = 0$ ou K, d'où $x = 0$ ou $\frac{\pi}{2}$, on a les formules suivantes :

$$(9)\quad \begin{cases} \vartheta(0) = \vartheta_3\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{\frac{k'}{\eta}} = 1 + 2\sum_1^\infty (-1)^n q^{n^2}, \\ \vartheta_1(0) = \vartheta_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \\ \vartheta_2(0) = \vartheta_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{\frac{k}{\eta}} = 2\sum_0^\infty q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}, \\ \vartheta_3(0) = \vartheta\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{\eta}} = 1 + 2\sum_1^\infty q^{n^2}. \end{cases}$$

Des formules des n[os] 1333 et suivants on tire celles-ci :

(10) Pour $u = u_0 + 2m\mathrm{K} + 2ni\mathrm{K}'$, $\quad x = x_0 + 2m\frac{\pi}{2} + 2ni\rho$,

on a

$$(-1)^n \frac{\vartheta(x)}{\vartheta(x_0)} = (-1)^{m+n}\frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta_1(x_0)} = (-1)^m \frac{\vartheta_2(x)}{\vartheta_2(x_0)} = \frac{\vartheta_3(x)}{\vartheta_3(x_0)} = q^{-n^2}e^{-2nix}.$$

(11) Pour $u = u_0 + 2m\mathrm{K} + (2n+1)i\mathrm{K}'$, $\quad x = x_0 + 2m\frac{\pi}{2} + (2n+1)i\rho$,

on a

$$(-1)^{n-\frac{1}{2}}\frac{\vartheta(x)}{\vartheta(x_0)} = (-1)^{m+n-\frac{1}{2}}\frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta_1(x_0)} = (-1)^m\frac{\vartheta_2(x)}{\vartheta_2(x_0)} = \frac{\vartheta_3(x)}{\vartheta_3(x_0)} = q^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} e^{-(2n+1)ix}.$$

Si l'on pose, comme au n° 1337,

$$(12)\quad \begin{cases} \dfrac{\eta'}{\eta} = \dfrac{K}{K'} = \dfrac{\pi}{2\rho} = \dfrac{2\rho'}{\pi} = \sqrt{\dfrac{\rho'}{\rho}} = \gamma^2 = \dfrac{1}{\gamma'^2}, \\ \text{et de plus} \\ U = e^{\frac{\pi u^2}{4KK'}} = e^{\frac{xx'}{\pi}} = e^{\frac{x^2}{2\rho}} = e^{\frac{x'^2}{2\rho'}} = q'^{\frac{x^2}{\pi^2}} = q^{\frac{x'^2}{\pi^2}}, \end{cases}$$

la relation établie au n° 1338 donnera les formules

$$(13)\quad \begin{cases} \vartheta\,(ix) = \gamma U \vartheta_2(x', \rho'), \\ \dfrac{1}{i}\vartheta_1(ix) = \gamma U \vartheta_1(x', \rho'), \\ \vartheta_2(ix) = \gamma U \vartheta\,(x', \rho'), \\ \vartheta_3(ix) = \gamma U \vartheta_3(x', \rho'). \end{cases}$$

En changeant dans ces formules q en q' et γ en $\dfrac{1}{\gamma}$, et développant le résultat de cette substitution au moyen des formules (2), on en tirera de nouvelles expressions des fonctions ϑ, qui sont avantageuses pour le calcul numérique, lorsque k et q sont très-voisins de l'unité, et par suite q' très petit :

$$(14)\quad \begin{cases} \vartheta\,(x) = \dfrac{\gamma}{U}\cdot 2\displaystyle\sum_0^\infty q'^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} \operatorname{Ch}(2n+1)x', \\ \vartheta_1(x) = \dfrac{\gamma}{U}\cdot 2\displaystyle\sum_0^\infty (-1)^n q'^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} \operatorname{Sh}(2n+1)x', \\ \vartheta_2(x) = \dfrac{\gamma}{U}\left(1 + 2\displaystyle\sum_1^\infty (-1)^n q'^{n^2} \operatorname{Ch} 2nx'\right), \\ \vartheta_3(x) = \dfrac{\gamma}{U}\left(1 + 2\displaystyle\sum_1^\infty q'^{n^2} \operatorname{Ch} 2nx'\right). \end{cases}$$

On en tire, pour remplacer les formules (6),

$$(15)\quad \begin{cases} \vartheta\,(0) = \gamma\,.\,2\displaystyle\sum_0^\infty q'^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}, \\ \vartheta_2(0) = \gamma\left[1 + 2\displaystyle\sum_1^\infty (-1)^n q'^{n^2}\right], \\ \vartheta_3(0) = \gamma\left(1 + 2\displaystyle\sum_1^\infty q'^{n^2}\right). \end{cases}$$

1347. Si l'on remplace, dans les fonctions ϑ, la variable réelle x par une variable complexe $x+iy$, en s'appuyant sur les formules

$$\frac{\cos(\alpha+i\beta)+\cos(\alpha-i\beta)}{2}=\cos\alpha\,\mathrm{Ch}\beta, \quad \text{etc.},$$

et posant

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned}
g\,(x,iy) &= 1+2\sum_1^\infty(-1)^n q^{n^2}\cos 2nx\,\mathrm{Ch}\,2ny,\\
g_1(x,iy) &= 2\sum_0^\infty(-1)^n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}\sin(2n+1)x\,\mathrm{Ch}(2n+1)y,\\
g_2(x,iy) &= 2\sum_0^\infty q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}\cos(2n+1)x\,\mathrm{Ch}(2n+1)y,\\
g_3(x,iy) &= 1+2\sum_1^\infty q^{n^2}\cos 2nx\,\mathrm{Ch}\,2ny,\\
h\,(x,iy) &= -2\sum_1^\infty(-1)^n q^{n^2}\sin 2nx\,\mathrm{Sh}\,2ny,\\
h_1(x,iy) &= 2\sum_0^\infty(-1)^n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}\cos(2n+1)x\,\mathrm{Sh}(2n+1)y,\\
h_2(x,iy) &= 2\sum_0^\infty q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}\sin(2n+1)x\,\mathrm{Sh}(2n+1)y,\\
h_3(x,iy) &= 2\sum_1^\infty q^{n^2}\sin 2nx\,\mathrm{Sh}\,2ny,
\end{aligned}\right.$$

on aura, pour l'indice $\mu=0,\ 1,\ 2,\ 3,$

$$(17)\qquad \vartheta_\mu(x\pm iy)=g_\mu(x,iy)\pm ih_\mu(x,iy).$$

Dans le cas où le module serait très-voisin de l'unité, on transformerait $\vartheta_\mu(x+iy)$ en $\vartheta_\mu[i(y-ix)]$. En ayant alors égard aux formules (13), on ramènerait les développements à ceux des fonctions $\vartheta_\nu(y'-ix',\ q')$. Par exemple, en posant, d'après les formules (12),

$$y'=y\sqrt{\frac{\rho'}{\rho}},\quad \mathrm{V}=e^{\frac{y^2-x^2}{2\rho}}=e^{\frac{y'^2-x'^2}{2\rho'}},$$

on aurait

$$\vartheta(x+iy)=\vartheta[i(y-ix)]=\gamma e^{\frac{(y'-ix')^2}{2\rho'}}\,\vartheta_2(y'-ix',q')$$
$$=\gamma V e^{\frac{ix'y'}{\rho'}}\,[g_2(y',ix',q')-ih_2(y',ix',q')],$$

et de même pour les autres.

1348. Des expressions (4) du n° **1344** il est facile de déduire les développements en séries des logarithmes des fonctions ϑ.

On a d'abord

$$\log(1-q^{2n})=-\sum_{1}^{\infty}{}_{\nu}\,\frac{1}{\nu}\,q^{2n\nu}.$$

En sommant les deux membres de l'égalité par rapport à l'indice n, depuis $n=1$ jusqu'à $n=\infty$, il vient

$$\sum_{1}^{\infty}{}_{n}\,q^{2n\nu}=\frac{q^{2\nu}}{1-q^{2\nu}},$$

et par suite

$$\log\prod_{1}^{\infty}(1-q^{2n})=-\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{\nu}\,\frac{q^{2\nu}}{1-q^{2\nu}}.$$

L'expression $1-2q^n\cos 2x+q^{2n}$ se décomposant en

$$(1-q^n e^{2ix})(1-q^n e^{-2ix}),$$

on a, pour les logarithmes des deux facteurs,

$$\log(1-q^n e^{\pm 2ix})=-\sum_{1}^{\infty}{}_{\nu}\,\frac{1}{\nu}\,q^{n\nu}e^{\pm 2\nu ix},$$

d'où

$$\log(1-2q^n\cos 2x+q^{2n})=-2\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{\nu}\,q^{n\nu}\cos 2\nu x.$$

En sommant par rapport à n, selon que n sera de la forme $2m-1$ ou de la forme $2m$, on aura

$$\log\prod_{1}^{\infty}(1-2q^n\cos 2x+q^{2n})=-2\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{\nu}\,\frac{q^{\nu}}{1-q^{2\nu}}\cos 2\nu x,$$

$$\text{ou}\quad =-2\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{\nu}\,\frac{q^{2\nu}}{1-q^{2\nu}}\cos 2\nu x$$

Si l'on avait eu à sommer les logarithmes des expressions

$$1 + 2q^n \cos 2x + q^{2n},$$

on aurait eu le même résultat, au changement près de $\frac{1}{\nu}$ en $\frac{(-1)^\nu}{\nu}$.

D'après cela, on aura, pour les développements des logarithmes des quatre fonctions ϑ, en posant, pour abréger,

$$(18) \qquad Q = -\sum_1^\infty \frac{1}{n} \frac{q^{2n}}{1 - q^{2n}} = -\frac{1}{2} \sum_1^\infty \frac{1}{n} \frac{q^n}{\operatorname{Sh} 2n\rho},$$

les expressions suivantes,

$$(19) \quad \begin{cases} \log \vartheta\ (x) = Q - 2 \sum_1^\infty \frac{1}{n} \frac{q^n}{1 - q^{2n}} \cos 2nx, \\ \log \vartheta_1(x) = Q + \log\left(2q^{\frac{1}{4}} \sin x\right) - 2 \sum_1^\infty \frac{1}{n} \frac{q^{2n}}{1 - q^{2n}} \cos 2nx, \\ \log \vartheta_2(x) = Q + \log\left(2q^{\frac{1}{4}} \cos x\right) - 2 \sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{n} \frac{q^{2n}}{1 - q^{2n}} \cos 2nx, \\ \log \vartheta_3(x) = Q - 2 \sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{n} \frac{q^n}{1 - q^{2n}} \cos 2nx, \end{cases}$$

ou, sous une autre forme,

$$(20) \quad \begin{cases} \log \vartheta\ (x) = -2 \sum_1^\infty \frac{q^n + \cos 2nx}{n \operatorname{Sh} 2n\rho}, \\ \log \vartheta_1(x) = \log\left(2q^{\frac{1}{4}} \sin x\right) - 2 \sum_1^\infty \frac{q^n(1 - \cos 2nx)}{n \operatorname{Sh} 2n\rho}, \\ \log \vartheta_2(x) = \log\left(2q^{\frac{1}{4}} \cos x\right) - 2 \sum_1^\infty \frac{q^n[1 + (-1)^n \cos 2nx]}{n \operatorname{Sh} 2n\rho}, \\ \log \vartheta_3(x) = -2 \sum_1^\infty \frac{q^n + (-1)^n \cos 2nx}{n \operatorname{Sh} 2n\rho}. \end{cases}$$

Pour les valeurs complexes de l'argument, la formule (17) du

numéro précédent donne la relation

$$(21) \qquad \frac{1}{2i}\log\frac{\vartheta_\mu(x+iy)}{\vartheta_\mu(x-iy)} = \text{arc tang}\,\frac{h_\mu(x,iy)}{g_\mu(x,iy)}.$$

1349. Les dérivées logarithmiques des fonctions ϑ jouent un rôle important dans l'Analyse. Jacobi a désigné, à un facteur constant près, celle de $\vartheta(x)$ par le symbole

$$\mathrm{Z}(u) = \mathrm{D}_u \log\Theta(u) = \eta\,\mathrm{D}_x \log\vartheta(x).$$

Cette fonction jouit des propriétés exprimées par les égalités

$$\mathrm{Z}(0) = \mathrm{Z}(\mathrm{K}) = 0, \quad \mathrm{Z}(-u) = -\mathrm{Z}(u), \quad \mathrm{Z}(u+2\mathrm{K}) = \mathrm{Z}(u).$$

On trouve immédiatement, par la différentiation des formules (2),

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned}
\mathrm{D}_x \log\vartheta\ (x) &= -\frac{4}{\vartheta(x)}\sum_1^\infty (-1)^n n q^{n^2}\sin 2nx,\\
\mathrm{D}_x \log\vartheta_1(x) &= \frac{2}{\vartheta_1(x)}\sum_0^\infty (-1)^n(2n+1)q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}\cos(2n+1)x,\\
\mathrm{D}_x \log\vartheta_2(x) &= -\frac{2}{\vartheta_2(x)}\sum_0^\infty (2n+1)q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}\sin(2n+1)x,\\
\mathrm{D}_x \log\vartheta_3(x) &= -\frac{4}{\vartheta_3(x)}\sum_1^\infty n q^{n^2}\sin 2nx,
\end{aligned}\right.$$

ou, par la différentiation des formules (20),

$$(23)\quad \left\{\begin{aligned}
\mathrm{D}_x \log\vartheta\ (x) &= 2\sum_1^\infty \frac{\sin 2nx}{\mathrm{Sh}\,2n\rho},\\
\mathrm{D}_x \log\vartheta_1(x) &= \cot x + 2\sum_1^\infty q^n\,\frac{\sin 2nx}{\mathrm{Sh}\,2n\rho},\\
\mathrm{D}_x \log\vartheta_2(x) &= -\,\mathrm{tang}\,x + 2\sum_1^\infty (-1)^n q^n\,\frac{\sin 2nx}{\mathrm{Sh}\,2n\rho},\\
\mathrm{D}_x \log\vartheta_3(x) &= 2\sum_1^\infty (-1)^n\,\frac{\sin 2nx}{\mathrm{Sh}\,2n\rho}.
\end{aligned}\right.$$

On voit que la troisième et la quatrième des formules (23) se déduisent de la seconde et de la première par le changement de x en $x+\frac{\pi}{2}$.

En prenant pour les ϑ leurs valeurs déterminées par les formules (3) du n° **1344**, combinées avec les formules (35) du n° **1337**, et opérant comme on vient de le faire, on trouverait les formules suivantes, avantageuses dans le cas de q voisin de l'unité :

$$(24)\quad \begin{cases} D_x \log\vartheta\,(x) = -\dfrac{2x'}{\pi} + \gamma^2\left[\operatorname{Th} x' - 2\sum_1^\infty (-1)^n q'^n \dfrac{\operatorname{Sh} 2nx'}{\operatorname{Sh} 2n\rho'}\right], \\ D_x \log\vartheta_1(x) = -\dfrac{2x'}{\pi} + \gamma^2\left[\dfrac{1}{\operatorname{Th} x'} - 2\sum_1^\infty q'^n \dfrac{\operatorname{Sh} 2nx'}{\operatorname{Sh} 2n\rho'}\right], \\ D_x \log\vartheta_2(x) = -\dfrac{2x'}{\pi} - 2\gamma^2 \sum_1^\infty \dfrac{\operatorname{Sh} 2nx'}{\operatorname{Sh} 2n\rho'}, \\ D_x \log\vartheta_3(x) = -\dfrac{2x'}{\pi} - 2\gamma^2 \sum_1^\infty (-1)^n \dfrac{\operatorname{Sh} 2nx'}{\operatorname{Sh} 2n\rho'}. \end{cases}$$

Dans le cas où les fonctions ϑ ont un argument imaginaire ix, on pourra obtenir leurs dérivées logarithmiques en changeant x en ix dans les formules (22), ce qui donne, par exemple,

$$(25)\qquad D_x \log\vartheta(ix) = \frac{4}{\vartheta(ix)} \sum_1^\infty (-1)^n n q^2 \operatorname{Sh} 2nx.$$

On peut aussi partir des formules (3) du n° **1344**, d'après lesquelles

$$\log\vartheta(ix) = \text{const} + \sum_0^\infty \log(1 - 2q^{2n+1}\operatorname{Ch} 2x + q^{4n+2}),$$
etc.,

et d'où l'on tire, en différentiant,

$$(25)\quad \begin{cases} D_x \log\vartheta\,(ix) = -2\operatorname{Sh} 2x \sum_0^\infty \dfrac{1}{\operatorname{Ch}(4n+2)\rho - \operatorname{Ch} 2x}, \\ D_x \log\vartheta_1(ix) = \dfrac{1}{\operatorname{Th} x} - 2\operatorname{Sh} 2x \sum_1^\infty \dfrac{1}{\operatorname{Ch} 4n\rho - \operatorname{Ch} 2x}, \\ D_x \log\vartheta_2(ix) = -\operatorname{Th} x + 2\operatorname{Sh} 2x \sum_1^\infty \dfrac{1}{\operatorname{Ch} 4n\rho + \operatorname{Ch} 2x}, \\ D_x \log\vartheta_3(ix) = 2\operatorname{Sh} 2x \sum_0^\infty \dfrac{1}{\operatorname{Ch}(4n+2)\rho + \operatorname{Ch} 2x}. \end{cases}$$

1350. Nous avons vu [1161] que deux fonctions uniformes et continues dans toute l'étendue du plan et ayant les mêmes zéros et les mêmes infinis, chacune avec le même ordre de multiplicité, sont égales entre elles, à un facteur constant près.

La fonction de x

$$\frac{\vartheta_\mu(\alpha+x)\vartheta_\mu(\alpha-x)}{[\vartheta_\mu(\alpha)]^2[\vartheta_\nu(x)]^2}$$

est doublement périodique, ses périodes étant π et $2i\rho$. Elle admet pour infinis doubles les zéros doubles de $[\vartheta_\nu(x)]^2$, et par suite les zéros du carré de celle des fonctions

$$\operatorname{sn}\frac{x}{\eta},\quad \frac{1}{\operatorname{sn}\frac{x}{\eta}},\quad \frac{1}{\operatorname{cn}\frac{x}{\eta}},\quad \frac{1}{\operatorname{dn}\frac{x}{\eta}}$$

qui a pour numérateur $\vartheta_\nu(x)$.

Par exemple, la fonction

$$\frac{\vartheta_1(\alpha+x)\vartheta_1(\alpha-x)}{[\vartheta_1(\alpha)]^2[\vartheta(x)]^2}$$

admet les mêmes infinis et, de plus, les mêmes zéros que la fonction

$$1-\frac{\operatorname{sn}^2\frac{x}{\eta}}{\operatorname{sn}^2\frac{\alpha}{\eta}}.$$

Pour $x=0$, les deux fonctions se réduisent à l'unité. Donc elles sont égales pour toute valeur de x, c'est-à-dire que l'on a

$$\frac{\vartheta_1(\alpha+x)\vartheta_1(\alpha-x)}{[\vartheta_1(\alpha)]^2[\vartheta(x)]^2}=1-\frac{\operatorname{sn}^2 u}{\operatorname{sn}^2 a},$$

a étant égal à $\frac{\alpha}{\eta}$.

On établirait de même l'égalité

$$\frac{\vartheta(x+\alpha)\vartheta(x-\alpha)}{[\vartheta(\alpha)]^2[\vartheta(x)]^2}=1-k^2\operatorname{sn}^2 a\operatorname{sn}^2 u.$$

§ VI.

DÉVELOPPEMENT DES FONCTIONS ELLIPTIQUES EN SÉRIES DE FONCTIONS PÉRIODIQUES.

1351. Les fonctions elliptiques $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$ ont pour infinis les valeurs de la forme

$$u = 2mK + (2n+1)iK',$$

et la fonction $\operatorname{tn} u$ les valeurs de la forme

$$u = (2m+1)K + 2niK'.$$

Il résulte de là que, si par deux infinis consécutifs, correspondants à des valeurs $n-1$ et n de l'indice n, on mène deux parallèles à l'axe des x, la bande de largeur $2K'$, comprise entre ces parallèles, ne contenant aucun infini de la fonction, celle-ci sera développable, dans l'intérieur de cette bande [1178], en une série convergente, ordonnée suivant les puissances positives et négatives de l'exponentielle

$$e^{i\frac{\pi u}{2K}} = e^{ix}.$$

Remarquons que la même série ne pourrait servir pour deux bandes consécutives. Mais on peut ramener le développement pour une bande quelconque au développement pour une bande donnée, correspondante à un multiple de $2iK'$ moindre de ν unités, en remplaçant u par $u - 2\nu iK'$, ou x par $x - 2\nu i\rho$, ce qui ne peut changer que le signe de la fonction elliptique [1311].

1352. La fonction $\operatorname{sn} u$ étant impaire et changeant de signe quand on remplace u par $u + 2K$, ou x par $x + \pi$, son développement, qui sera convergent dans l'intérieur de la bande comprise entre les parallèles $u = \pm iK'$, aura nécessairement la forme

$$\operatorname{sn} u = \sum_0^\infty a_m [e^{(2m+1)ix} - e^{-(2m+1)ix}]$$

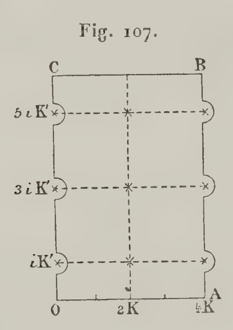
$$= \sum_0^\infty 2ia_m \sin(2m+1)x.$$

On a [1180], en multipliant l'équation précédente par $e^{(2m+1)ix}du$ et intégrant,

$$a_m = -\frac{1}{4K}\int_0^{4K} \operatorname{sn} u \,.\, e^{(2m+1)ix}\,du.$$

Pour calculer cette intégrale, considérons l'intégrale prise le long du contour d'un rectangle (*fig.* 107) ayant sa base sur l'axe des x,

Fig. 107.



de $u = 0$ à $u = 4K$, et sa hauteur égale à un multiple pair de K', les infinis situés sur les côtés verticaux étant évités suivant des demi-cercles, tous tournés dans le même sens. Ce contour contiendra ainsi dans son intérieur deux files verticales d'infinis, correspondantes aux abscisses $2K$ et $4K$.

Les valeurs de la fonction $\operatorname{sn} u$, prises à la même hauteur sur les portions OC et AB du contour, sont respectivement égales, et il en est de même pour les valeurs de la fonction $e^{-(2m+1)ix}$; donc les intégrales prises en parcourant ces deux chemins, l'un en sens contraire de l'autre, se détruiront mutuellement.

L'intégrale prise suivant BC pourra être supposée aussi petite que l'on voudra si l'on augmente indéfiniment la hauteur du rectangle. En effet, pour n assez grand, l'intégrale prise le long de BC,

$$\frac{1}{4K}\int_0^{4K} \operatorname{sn}(u + 2niK')\, e^{(2m+1)(ix-2n\rho)}\,du$$

$$= \frac{1}{4K} e^{-2n(2m+1)\rho}\int_0^{4K} \operatorname{sn} u \,.\, e^{(2m+1)ix}\,du,$$

est évidemment infiniment petite pour n infiniment grand.

Donc l'intégrale prise le long du contour du rectangle se réduit à *moins* l'intégrale prise le long de la base OA, c'est-à-dire à la valeur du coefficient cherché a_m.

Or l'intégrale prise le long du contour du rectangle est égale [1128] à la somme des résidus relatifs aux $2n$ infinis contenus dans l'intérieur du rectangle. Si nous considérons un de ces infinis, ayant pour coordonnées l'une des abscisses $2K$ ou $4K$ et l'ordonnée $(2\nu+1)K'$, en faisant

$$u = 2\mu K + (2\nu+1)iK' + \upsilon,$$

l'intégrale relative à cet infini sera égale [1130] à

$$2\pi i \lim_{\upsilon=0} \upsilon \,\mathrm{sn}[2\mu K + (2\nu+1)iK' + \upsilon]\, e^{(2m+1)i[\mu\pi + (2\nu+1)i\rho + \eta\upsilon]}.$$

Or on a [1289 et 1291]

$$\mathrm{sn}[2\mu K + (2\nu+1)iK' + \upsilon] = (-1)^\mu \mathrm{sn}(iK'+\upsilon) = \frac{(-1)^\mu}{k\,\mathrm{sn}\,\upsilon};$$

donc l'expression précédente a pour valeur

$$2\pi i \frac{(-1)^\mu}{k} \lim_{\upsilon=0} \frac{\upsilon}{\mathrm{sn}\,\upsilon} = \frac{(-1)^\mu}{k}.$$

Les autres facteurs se réduisant à $(-1)^\mu e^{-(2m+1)(2\nu+1)\rho}$, l'intégrale sera égale à

$$\frac{2\pi i}{k} e^{-(2m+1)(2\nu+1)\rho}.$$

Il faut maintenant sommer les intégrales appartenant à l'une des files et doubler le résultat, qui est, comme on voit, indépendant de μ. La double somme, pour ν infini, est égale à

$$\frac{2\pi i}{k}\frac{2e^{-(2m+1)\rho}}{1-e^{(4m+2)\rho}} = \frac{2\pi i}{k}\frac{1}{\mathrm{Sh}(2m+1)\rho}.$$

Donc la valeur du coefficient a_m est

$$a_m = \frac{\eta}{ik}\frac{1}{\mathrm{Sh}(2m+1)\rho},$$

et par suite on a, pour le développement cherché,

$$(1) \qquad \mathrm{sn}\,u = \frac{2\eta}{k}\sum_0^\infty \frac{\sin(2m+1)x}{\mathrm{Sh}(2m+1)\rho}.$$

1353. Par un calcul entièrement semblable, on obtiendra, entre les mêmes limites, le développement de la fonction $\mathrm{cn}\,u$, qui a les même infinis que $\mathrm{sn}\,u$. Seulement, $\mathrm{cn}\,u$ étant une fonction paire et changeant de signe lorsqu'on augmente u de $2\mathrm{K}$, son développement sera de la forme

$$\mathrm{cn}\,u = \sum_0^\infty a_m\left[e^{(2m+1)ix} + e^{-(2m+1)ix}\right]$$
$$= \sum_0^\infty 2a_m \cos(2m+1)x.$$

On trouvera ainsi

$$(2) \qquad \mathrm{cn}\,u = \frac{2\eta}{k}\sum_0^\infty \frac{\cos(2m+1)x}{\mathrm{Ch}(2m+1)\rho}.$$

1354. La fonction $\mathrm{dn}\,u$ étant paire et ayant pour période réelle $2\mathrm{K}$, son développement, entre les mêmes limites, sera de la forme

$$\mathrm{dn}\,u = a_0 + \sum_1^\infty a_m(e^{2mix} + e^{-2mix})$$
$$= a_0 + \sum_1^\infty 2a_m \cos 2mx.$$

En intégrant les deux membres de l'équation de 0 à $2\mathrm{K}$, on aura d'abord

$$a_0 = \frac{1}{2\mathrm{K}}\int_0^{2\mathrm{K}} \mathrm{dn}\,u\,du = \frac{1}{2\mathrm{K}}\int_0^\pi \Delta\varphi\,\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = \frac{\pi}{2\mathrm{K}} = \eta.$$

On obtiendra les autres coefficients a_m en intégrant après avoir multiplié par e^{2mix}. On trouvera de cette manière

$$a_m = \frac{\eta}{\mathrm{Ch}\,2m\rho},$$

et par suite

$$(3) \qquad \mathrm{dn}\,u = \eta\left(1 + 2\sum_1^\infty \frac{\cos 2mx}{\mathrm{Ch}\,2m\rho}\right).$$

1355. La fonction $\mathrm{tn}\,u$ a pour infinis les zéros de $\mathrm{cn}\,u$, c'est-

à-dire [1293] les valeurs

$$u = (2m+1)\mathrm{K} + 2ni\mathrm{K}', \quad \text{ou} \quad x = (2m+1)\frac{\pi}{2} + 2ni\rho.$$

Le développement sera convergent entre les parallèles correspondantes à $u=0$ et à $u=2i\mathrm{K}'$, excepté aux points $(2m+1)\mathrm{K}$ de l'axe des x, qui sont des infinis de $\mathrm{tn}\,u$. Ces points étant en même temps des infinis de $\mathrm{tang}\,x$, on peut faire disparaître les infinis du développement, en considérant, au lieu de $\mathrm{tn}\,u$, la fonction

$$\mathrm{f}(u) = \mathrm{tn}\,u - a_0\,\mathrm{tang}\,x,$$

la constante a_0 étant déterminée de manière que le second membre s'annule toutes les fois que $\mathrm{tn}\,u$ et $\mathrm{tang}\,x$ deviennent simultanément infinis.

On a maintenant [1294]

$$\begin{aligned} v\,\mathrm{tn}(\mathrm{K}+2\nu i\mathrm{K}'+v) &= (-1)^\nu v\,\mathrm{tn}(\mathrm{K}+v) \\ &= (-1)^{\nu-1} v\,\mathrm{tnc}\,v = (-1)^{\nu-1}\frac{v}{k'\,\mathrm{tn}\,v}, \end{aligned}$$

dont la limite est $\dfrac{(-1)^{\nu-1}}{k'}$. La somme des intégrales en question sera donc

$$(-1)^m\frac{2\pi i}{k'}\sum_1^\infty{}_\nu(-1)^{\nu-1}q^{2m\nu} = (-1)^m\frac{2\pi i}{k'}\frac{q^{2m}}{1+q^{2m}}.$$

Donc

$$2ia_m = \frac{4\eta}{k'}(-1)^m\frac{q^{2m}}{1+q^{2m}} = \frac{2\eta}{k'}(-1)^m\frac{q^m}{\mathrm{Ch}\,2m\rho},$$

et, par suite,

$$(4) \qquad \mathrm{tn}\,u = \frac{\eta}{k'}\left[\mathrm{tang}\,x + 2\sum_1^\infty(-1)^m q^m\frac{\sin 2mx}{\mathrm{Ch}\,2m\rho}\right].$$

1356. On a

$$du = \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = \frac{d\,\mathrm{am}\,u}{\mathrm{dn}\,u}, \quad \text{d'où} \quad d\,\mathrm{am}\,u = \mathrm{dn}\,u\,du.$$

En intégrant le développement (3) de $\mathrm{dn}\,u$, on aura celui de la fonction $\mathrm{am}\,u$:

$$(5) \qquad \mathrm{am}\,u = x + \sum_1^\infty\frac{1}{m}\frac{\sin 2mx}{\mathrm{Ch}\,2m\rho}.$$

En différentiant les développements (1), (2), (3), on en tirera ceux des produits

$$\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u,\quad \operatorname{sn} u \operatorname{dn} u,\quad \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u = \frac{1}{2}\sin 2 \operatorname{am} u.$$

1357. Si l'on change, dans les formules précédentes, u en $K - u$, x en $\frac{\pi}{2} - x$, on aura les développements des fonctions

$$(6)\qquad \operatorname{snc} u = \frac{2\eta}{k}\sum_0^\infty (-1)^m \frac{\cos(2m+1)x}{\operatorname{Sh}(2m+1)\rho},$$

$$(7)\qquad \operatorname{cnc} u = \frac{2\eta}{k}\sum_0^\infty (-1)^m \frac{\sin(2m+1)x}{\operatorname{Ch}(2m+1)\rho},$$

$$(8)\qquad \operatorname{dnc} u = \frac{k'}{\operatorname{dn} u} = \eta\left[1 + 2\sum_1^\infty (-1)^m \frac{\cos 2mx}{\operatorname{Ch} 2m\rho}\right],$$

$$(9)\qquad \operatorname{tnc} u = \frac{1}{k' \operatorname{tn} u} = \eta\left[\frac{1}{\operatorname{tang} x} + 2\sum_1^\infty (-1)^m q^m \frac{\sin 2mx}{\operatorname{Ch} 2m\rho}\right],$$

$$(10)\qquad \operatorname{amc} u = \frac{\pi}{2} - x - \sum_1^\infty \frac{(-1)^m}{m}\,\frac{\sin 2mx}{\operatorname{Ch} 2m\rho}.$$

En traitant les fonctions $\frac{1}{\operatorname{sn} u}$, $\frac{1}{\operatorname{cn} u}$ par les principes des nos 1352 et suivants, on trouvera

$$(11)\qquad \frac{1}{\operatorname{sn} u} = \eta\left[\frac{1}{\sin x} + 2\sum_0^\infty q^{m+\frac{1}{2}} \frac{\sin(2m+1)x}{\operatorname{Sh}(2m+1)\rho}\right],$$

$$(12)\qquad \frac{1}{\operatorname{cn} u} = \frac{\eta}{k'}\left[\frac{1}{\cos x} + 2\sum_0^\infty (-1)^m q^{m+\frac{1}{2}} \frac{\cos(2m+1)x}{\operatorname{Ch}(2m+1)\rho}\right],$$

puis, en changeant x en $\frac{\pi}{2} - x$,

$$(13)\qquad \frac{1}{\operatorname{snc} u} = \frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{cn} u} = \eta\left[\frac{1}{\cos x} + 2\sum_0^\infty (-1)^m q^{m+\frac{1}{2}} \frac{\cos(2m+1)x}{\operatorname{Sh}(2m+1)\rho}\right],$$

$$(14)\qquad \frac{1}{\operatorname{cnc} u} = \frac{\operatorname{dn} u}{k' \operatorname{sn} u} = \frac{\eta}{k'}\left[\frac{1}{\sin x} - 2\sum_0^\infty q^{m+\frac{1}{2}} \frac{\sin(2m+1)x}{\operatorname{Ch}(2m+1)\rho}\right].$$

1358. Ces formules sont d'autant plus convergentes que le module k et la quantité q, qui en dépend, sont plus petits. Elles deviennent, au contraire, d'autant moins avantageuses que k et q sont plus voisins de l'unité, et, par suite, que k' et q' sont plus petits et ρ' plus grand. Il est facile de transformer ces développements en d'autres qui sont d'autant plus convergents que les premiers le sont moins.

On aura ainsi

$$(15)\quad \operatorname{sn} u = \frac{\operatorname{tn}' iu}{i} = \frac{\eta'}{k}\left[\operatorname{Th} x' + 2\sum_1^\infty (-1)^m q'^m \frac{\operatorname{Sh} 2mx'}{\operatorname{Ch} 2m\rho'}\right],$$

$$(16)\quad \operatorname{cn} u = \frac{1}{\operatorname{cn}' iu} = \frac{\eta'}{k}\left[\frac{1}{\operatorname{Ch} x'} + 2\sum_0^\infty (-1)^m q'^{m+\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{Ch}(2m+1)x'}{\operatorname{Ch}(2m+1)\rho'}\right],$$

$$(17)\quad \operatorname{dn} u = \frac{1}{\operatorname{snc}' iu} = \eta'\left[\frac{1}{\operatorname{Ch} x'} + 2\sum_0^\infty (-1)^m q'^{m+\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{Ch}(2m+1)x'}{\operatorname{Sh}(2m+1)\rho'}\right],$$

$$(18)\quad \operatorname{tn} u = \frac{\operatorname{sn}' iu}{i} = \frac{2\eta'}{k'}\sum_0^\infty \frac{\operatorname{Sh}(2m+1)x'}{\operatorname{Sh}(2m+1)\rho'},$$

$$(19)\quad \begin{cases} \operatorname{am} u = \dfrac{1}{\eta'}\displaystyle\int_0^{x'} \operatorname{dn} u\, dx' \\ \quad = \operatorname{arc\,tang} e^{x'} + 2\displaystyle\sum_0^\infty \frac{(-1)^m q'^{m+\frac{1}{2}}}{2m+1}\,\frac{\operatorname{Sh}(2m+1)x'}{\operatorname{Sh}(2m+1)\rho'}, \end{cases}$$

et de même pour les autres formules.

1359. Cherchons maintenant les développements en séries des carrés des fonctions elliptiques.

Si l'on élève au carré les deux membres de la formule (2) [1353], et que l'on pose, pour abréger,

$$P_\mu = \frac{1}{\operatorname{Ch} \mu\rho},$$

on aura

$$\left(\frac{k}{2n}\operatorname{cn} u\right)^2 = \sum_0^\infty{}_m \sum_0^\infty{}_{m'} P_{2m+1}P_{2m'+1}\cos(2m+1)x\cos(2m'+1)x$$

$$= \frac{1}{2}\sum_0^\infty{}_m \sum_0^\infty{}_{m'} P_{2m+1}P_{2m'+1}[\cos(2m+2m'+2)x + \cos(2m-2m')x].$$

Le terme constant du développement s'obtiendra en faisant, dans le second cosinus de la parenthèse, $m = m'$, ce qui donne

$$a_0 = \frac{2\eta^2}{k^2} \sum_0^\infty \frac{1}{\mathrm{Ch}^2(2m+1)\rho} = \frac{8\eta^2}{k^2} \sum_0^\infty \frac{q^{2m+1}}{(1+q^{2m+1})^2}.$$

Calculons actuellement le coefficient a_n de $\cos 2nx$. Les nombres m, m' n'étant jamais négatifs, il faudra prendre pour termes de a_n d'abord, parmi ceux qui multiplient le premier cosinus, les termes dans lesquels $2m + 2m' + 2 = 2n$ ou $m' = n - m - 1$, ce qui donnera la somme

$$\frac{1}{2} \sum_{m=0}^{m=n-1} \mathrm{P}_{2m+1} \mathrm{P}_{2n-2m-1}.$$

Or on a l'identité

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{Sh}\beta}{\mathrm{Ch}\alpha\,\mathrm{Ch}(\beta-\alpha)} &= \frac{\mathrm{Sh}\alpha}{\mathrm{Ch}\alpha} + \frac{\mathrm{Sh}(\beta-\alpha)}{\mathrm{Ch}(\beta-\alpha)} \\ &= 1 - \frac{\mathrm{Ch}\alpha - \mathrm{Sh}\alpha}{\mathrm{Ch}\alpha} + 1 - \frac{\mathrm{Ch}(\beta-\alpha) - \mathrm{Sh}(\beta-\alpha)}{\mathrm{Ch}(\beta-\alpha)} \\ &= 2 - \frac{e^{-\alpha}}{\mathrm{Ch}\alpha} - \frac{e^{-\beta+\alpha}}{\mathrm{Ch}(\beta-\alpha)}.\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2} \mathrm{P}_{2m+1} \mathrm{P}_{2n-2m-1} \\ &\quad = \frac{1}{\mathrm{Sh}\,2n\rho}\left[1 - \frac{q^{m+\frac{1}{2}}}{2\,\mathrm{Ch}(2m+1)\rho} - \frac{q^{n-m-\frac{1}{2}}}{2\,\mathrm{Ch}(2n-2m-1)\rho}\right].\end{aligned}$$

En sommant cette expression depuis $m = 0$ jusqu'à $m = n - 1$, les sommes relatives aux deux derniers termes sont égales entre elles, et l'on aura, pour cette partie de a_n,

$$\text{(A)} \qquad \frac{1}{\mathrm{Sh}\,2n\rho}\left[n - \sum_0^{n-1} \frac{q^{m+\frac{1}{2}}}{\mathrm{Ch}(2m+1)\rho}\right].$$

Pour les termes qui multiplient le second cosinus, on devra prendre ceux pour lesquels $m - m'$ est égal soit à $+n$, soit à $-n$; les deux sommes ainsi obtenues étant identiques, il suffira de prendre l'une d'entre elles et de la doubler, ce qui donnera, pour

cette partie de a_n,

$$\sum_0^\infty {}_m \mathrm{P}_{2m+1}\mathrm{P}_{2n+2m+1}.$$

L'identité

$$\frac{\operatorname{Sh}\beta}{\operatorname{Ch}\alpha\operatorname{Ch}(\alpha+\beta)} = -\frac{\operatorname{Sh}\alpha}{\operatorname{Ch}\alpha} + \frac{\operatorname{Sh}(\alpha+\beta)}{\operatorname{Ch}(\alpha+\beta)} = \frac{e^{-\alpha}}{\operatorname{Ch}\alpha} - \frac{e^{-\alpha-\beta}}{\operatorname{Ch}(\alpha+\beta)}$$

donne, pour cette somme, la valeur

$$\text{(B)}\qquad \frac{1}{\operatorname{Sh}2n\rho}\left[\sum_0^\infty {}_m \frac{q^{m+\frac{1}{2}}}{\operatorname{Ch}(2m+1)\rho} - \sum_0^\infty {}_m \frac{q^{n+m+\frac{1}{2}}}{\operatorname{Ch}(2n+2m+1)\rho}\right].$$

En réunissant les deux parties (A) et (B), on aura, pour la valeur du coefficient demandé,

$$a_n = \frac{n}{\operatorname{Sh}2n\rho} + \frac{1}{\operatorname{Sh}2n\rho}\left[\sum_n^\infty \frac{q^{m+\frac{1}{2}}}{\operatorname{Ch}(2m+1)\rho} - \sum_0^\infty \frac{q^{n+m+\frac{1}{2}}}{\operatorname{Ch}(2n+2m+1)\rho}\right].$$

Or les deux sommes de la dernière parenthèse forment deux séries convergentes, composées de termes identiques chacun à chacun; donc elles se détruisent mutuellement, et il reste simplement

$$a_n = \frac{n}{\operatorname{Sh}2n\rho},$$

d'où enfin

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned} \operatorname{cn}^2 u &= \frac{2\eta^2}{k^2}\left[\sum_1^\infty \frac{1}{\operatorname{Ch}^2(2n-1)\rho} + 2\sum_1^\infty n\,\frac{\cos 2nx}{\operatorname{Sh}2n\rho}\right] \\ &= \frac{8\eta^2}{k^2}\left[\sum_1^\infty \frac{q^{2n-1}}{(1+q^{2n-1})^2} + \sum_1^\infty \frac{nq^n}{1-q^{2n}}\cos 2nx\right].\end{aligned}\right.$$

1360. Pour obtenir le développement de $\operatorname{sn}^2 u$, remarquons que la valeur (2) de $\frac{k}{2\eta}\operatorname{cn} u$ se change dans la valeur (1) de $\frac{ik}{2\eta}\operatorname{sn} u$, lorsqu'on remplace, dans (2), x par $\frac{\pi}{2}-x$ et $i\rho$ par $\frac{\pi}{2}-i\rho$ (ou q par $-q$). On aura donc la valeur de $-\frac{k^2}{2\eta^2}\operatorname{sn}^2 u$ si l'on fait

la même substitution dans la valeur de $\frac{k^2}{2\eta^2}\operatorname{cn}^2 u$, ce qui donne, par un calcul très-simple,

$$(21)\quad \begin{cases} \operatorname{sn}^2 u = \dfrac{2\eta^2}{k^2}\left[\displaystyle\sum_1^\infty \frac{1}{\operatorname{Sh}^2(2n-1)\rho} - 2\sum_1^\infty n\,\frac{\cos 2nx}{\operatorname{Sh} 2n\rho}\right] \\ \qquad = \dfrac{8\eta^2}{k^2}\left[\displaystyle\sum_1^\infty \frac{q^{2n-1}}{(1-q^{2n-1})^2} - \sum_1^\infty \frac{nq^n}{1-q^{2n}}\cos 2nx\right]. \end{cases}$$

Les deux formules (20) et (21) donnent, comme on devait s'y attendre, pour $\operatorname{cn}^2 u + \operatorname{sn}^2 u$, une somme constante qui est la même pour $u = 0$, c'est-à-dire l'unité. On en conclut la formule

$$(22)\quad \frac{k^2}{\eta^2} = \left(\frac{2kK}{\pi}\right)^2 = 2\sum_1^\infty\left[\frac{1}{\operatorname{Ch}^2(2n-1)\rho} + \frac{1}{\operatorname{Sh}^2(2n-1)\rho}\right]$$

qui fait connaître la valeur de K au moyen de celle de k et de celle de ρ ou du rapport $\frac{K'}{K}$.

En ajoutant les formules (20) et (21), où l'on aura fait dans la première $x = 0$, dans la seconde $x = \frac{\pi}{2}$, il viendra

$$\frac{k^2}{\eta^2} = 2\sum_1^\infty\left[\frac{1}{\operatorname{Ch}^2(2n-1)\rho} + \frac{2n}{\operatorname{Sh} 2n\rho}\right],$$

$$\frac{k^2}{\eta^2} = 2\sum_1^\infty\left[\frac{1}{\operatorname{Sh}^2(2n-1)\rho} - \frac{2(-1)^n n}{\operatorname{Sh} 2n\rho}\right].$$

Si de la somme de ces deux égalités nous retranchons l'égalité (22), il vient cette autre formule plus simple :

$$(23)\quad \frac{k^2}{\eta^2} = 8\sum_1^\infty \frac{2n-1}{\operatorname{Sh}(4n-2)\rho} = 16\sum_1^\infty \frac{(2n-1)q^{2n-1}}{1-q^{4n-2}}.$$

1361. En opérant sur la formule (3) comme nous avons fait sur la formule (2), on obtiendra le développement de $\operatorname{dn}^2 u$ sous

la forme

$$(24)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{dn}^2 u &= \eta^2\left[1 + 2\sum_1^\infty \frac{1}{\mathrm{Ch}^2\, 2n\rho} + 2\sum_1^\infty n\,\frac{\cos 2nx}{\mathrm{Sh}\, 2n\rho}\right] \\ &= \eta^2\left[1 + 8\sum_1^\infty \left(\frac{q^n}{1+q^{2n}}\right)^2 + 8\sum_1^\infty \frac{nq^n}{1-q^{2n}}\cos 2nx\right]. \end{aligned}\right.$$

§ VII.

TRANSFORMATION DE LANDEN. — CALCUL NUMÉRIQUE DES INTÉGRALES ELLIPTIQUES DE PREMIÈRE ESPÈCE.

1362. Si, dans l'égalité

$$u = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = \arg\mathrm{sn}(z, k),$$

on change k en $\frac{1}{k}$, l'intégrale u se changera dans la suivante,

$$w = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)\left(1-\dfrac{z^2}{k^2}\right)}} = k\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = ku,$$

ou encore, si l'on change z en kz_1,

$$w = \int_0^{z_1} \frac{dz_1}{\sqrt{(1-z_1^2)(1-k^2z_1^2)}} = \arg\mathrm{sn}(z_1, k) = \arg\left(\frac{z}{k}, k\right).$$

Donc, en égalant les deux expressions de w, on a la relation

$$(1)\qquad \arg\mathrm{sn}\left(z, \frac{1}{k}\right) = k\arg\mathrm{sn}\left(\frac{z}{k}, k\right),$$

d'où l'on tire, réciproquement,

$$(2)\qquad z = \mathrm{sn}\left(ku, \frac{1}{k}\right) = k\,\mathrm{sn}(u, k).$$

Donc si, dans la fonction $\mathrm{sn}(u, k)$, on change le module k en $\frac{1}{k}$, et l'argument u en ku, la fonction sera multipliée par k.

De l'équation (2) on tire, pour les valeurs des autres fonctions elliptiques de $\left(ku, \frac{1}{k}\right)$,

$$(3)\quad \begin{cases} \operatorname{cn}\left(ku, \frac{1}{k}\right) = \sqrt{1 - z^2} = \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}^2(u, k)} = \operatorname{dn}(u, k), \\ \operatorname{dn}\left(ku, \frac{1}{k}\right) = \sqrt{1 - \frac{z^2}{k^2}} = \sqrt{1 - \operatorname{sn}^2(u, k)} = \operatorname{cn}(u, k). \end{cases}$$

En posant, pour abréger,

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} \operatorname{am}\left(ku, \frac{1}{k}\right) = t,$$

on en conclut

$$(4)\quad t = \sqrt{\frac{1 - \operatorname{cn}\left(ku, \frac{1}{k}\right)}{1 + \operatorname{cn}\left(ku, \frac{1}{k}\right)}} = \sqrt{\frac{1 - \operatorname{dn} u}{1 + \operatorname{dn} u}} = \frac{k \operatorname{sn} u}{1 + \operatorname{dn} u} = \text{etc.}$$

On en tire, réciproquement,

$$\operatorname{dn} u = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad k \operatorname{sn} u = \frac{2t}{1 + t^2}, \quad \text{etc.}$$

En faisant $\operatorname{sn} u = z_1$ et substituant ces valeurs dans l'équation

$$ku = \int_0^{z_1} \frac{dz_1}{\sqrt{(1 - z_1^2)(1 - k^2 z_1^2)}},$$

on aura

$$(5)\quad \begin{cases} ku = \displaystyle\int_0^t \frac{2\,dt}{\sqrt{1 - 2\left(\frac{2}{k^2} - 1\right)t^2 + t^4}} \\ \quad = \displaystyle\int_0^t \frac{2\,dt}{\sqrt{1 - \left(\frac{1 + k'}{k}\right)^2 t^2}\,\sqrt{1 - \left(\frac{1 - k'}{k}\right)^2 t^2}}. \end{cases}$$

1363. Si l'on pose maintenant

$$y = \frac{1 + k'}{2} t, \quad l = \frac{1 - k'}{1 + k'},$$

l'égalité (5) deviendra

$$(6)\qquad \frac{1+k'}{2}u = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-l^2y^2)}}.$$

Donc, si l'on considère un nouveau module l et un nouvel argument v, liés aux anciens, k et u, par deux relations auxquelles on peut donner les formes suivantes :

$$(7)\qquad l = \frac{1-k'}{1+k'},\quad l' = \sqrt{1-l^2} = \frac{2\sqrt{k'}}{1+k'},\quad k' = \frac{1-l}{1+l},\quad k = \frac{2\sqrt{l}}{1+l},$$

$$(8)\qquad v = \frac{1+k'}{2}u,\quad u = \frac{2}{1+k'}v = (1+l)v,\quad ku = 2\sqrt{l}.v,$$

et dans lesquelles u et v varient dans un rapport constant, les fonctions elliptiques correspondantes aux deux systèmes (u, k), (v, l) seront liées entre elles par la relation

$$(9)\qquad y = \frac{1+k'}{k}t = t\sqrt{\frac{1+k'}{1-k'}} = \frac{t}{\sqrt{l}}.$$

Nous conviendrons, pour abréger l'écriture, de rapporter au module l toutes les fonctions elliptiques de l'argument v où le module ne sera pas explicitement indiqué. Nous aurons, d'après cela,

$$(10)\qquad \begin{cases} \sqrt{l}.\operatorname{sn} v = t = \operatorname{tang}\frac{1}{2}\operatorname{am}\left(ku, \frac{1}{k}\right) = \sqrt{\dfrac{1-\operatorname{dn} u}{1+\operatorname{dn} u}} \\[2ex] \qquad = \dfrac{\sqrt{1+k\operatorname{sn} u}-\sqrt{1-k\operatorname{sn} u}}{\sqrt{1+k\operatorname{sn} u}+\sqrt{1-k\operatorname{sn} u}}, \end{cases}$$

ce qui donne

$$(11)\qquad \sqrt{\frac{1+k\operatorname{sn} u}{1-k\operatorname{sn} u}} = \frac{1+\sqrt{l}.\operatorname{sn} v}{1-\sqrt{l}.\operatorname{sn} v}.$$

On voit par là que $z = \operatorname{sn} u$ et $y = \operatorname{sn} v$ sont liés entre eux par une relation du premier degré en z et du second degré en y. Cette transformation du système (z, k) dans le système (y, l) est dite, pour cette raison, une *transformation du second degré*.

Comme on a $\frac{1+k'}{2} < \frac{1+1}{2}$ ou 1, il s'ensuit des équations (7)

et (8) que l'on a à la fois

$$k > \frac{2}{1+1}\sqrt{l} > l, \quad \text{et} \quad u > v.$$

Donc la transformation précédente diminue à la fois les valeurs du module et de l'argument des fonctions elliptiques.

1364. Des équations (10) ou (11) on peut tirer les valeurs de toutes les fonctions elliptiques de (v, l) au moyen des fonctions elliptiques de (u, k). On trouve, par exemple,

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} \operatorname{sn} v &= \sqrt{\frac{1+k'}{1-k'}}\sqrt{\frac{1-\operatorname{dn} u}{1+\operatorname{dn} u}},\\ \operatorname{cn} v &= \sqrt{\frac{2}{1-k'}}\sqrt{\frac{\operatorname{dn} u - k'}{1+\operatorname{dn} u}},\\ \operatorname{dn} v &= \sqrt{\frac{2}{1+k'}}\sqrt{\frac{\operatorname{dn} u + k'}{1+\operatorname{dn} u}},\\ \frac{\operatorname{tn} v}{\operatorname{dn} v} &= \frac{1}{1+l}\operatorname{tn} u,\end{aligned}\right.$$

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} \operatorname{snc} v &= \sqrt{\frac{1+k'}{1-k'}}\sqrt{\frac{\operatorname{dn} u - k'}{k'+\operatorname{dn} u}},\\ \operatorname{cnc} v &= \sqrt{\frac{2k'}{1-k'}}\sqrt{\frac{1-\operatorname{dn} u}{k'+\operatorname{dn} u}},\\ \operatorname{dnc} v &= \sqrt{\frac{2k'}{1+k'}}\sqrt{\frac{1+\operatorname{dn} u}{k'+\operatorname{dn} u}},\\ \frac{\operatorname{dnc} v}{\operatorname{tnc} v} &= (1-l)\operatorname{tn} u.\end{aligned}\right.$$

A ces formules on peut joindre celles qui donnent les fonctions elliptiques du double de l'argument v. On a, par les formules (24) du n° 1315,

$$\operatorname{cn} 2u = \frac{\operatorname{cn}^2 u - \operatorname{sn}^2 u \operatorname{dn}^2 u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^4 u},$$

$$\operatorname{dn} 2u = \frac{\operatorname{dn}^2 u - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{cn}^2 u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^4 u}.$$

Si l'on pose, pour abréger,

$$\sqrt{1+\operatorname{dn}2u}=\mathrm{U},$$
$$\sqrt{\frac{2}{1+k'}}\sqrt{\operatorname{dn}2u+k'}=\mathrm{S},$$
$$\sqrt{\frac{2}{1-k'}}\sqrt{\operatorname{dn}2u-k'}=\mathrm{T},$$

on aura, par les formules précédentes,

$$\operatorname{dn}2v=\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{U}},\quad \operatorname{cn}2v=\frac{\mathrm{T}}{\mathrm{U}}.$$

Or on trouve facilement

$$\frac{1}{4}(\mathrm{S}+\mathrm{T})^2=1+\operatorname{cn}2u-\frac{1}{k^2}(1-\operatorname{dn}2u),$$
$$\frac{1}{4}(\mathrm{S}-\mathrm{T})^2=1-\operatorname{cn}2u-\frac{1}{k^2}(1-\operatorname{dn}2u).$$

En mettant pour $\operatorname{cn}2u$, $\operatorname{dn}2u$ leurs valeurs en sn^2u, il vient

$$1+\operatorname{dn}2u=\frac{2(1-k^2\operatorname{sn}^2u)}{1-k^2\operatorname{sn}^4u}=\mathrm{U}^2,$$
$$1-\operatorname{dn}2u=\frac{2k^2(\operatorname{sn}^2u-\operatorname{sn}^4u)}{1-k^2\operatorname{sn}^4u},$$
$$1+\operatorname{cn}2u=\frac{2(1-\operatorname{sn}^2u)}{1-k^2\operatorname{sn}^4u},$$
$$1-\operatorname{cn}2u=\frac{2(\operatorname{sn}^2u-k^2\operatorname{sn}^4u)}{1-k^2\operatorname{sn}^4u}.$$

D'après cela,

$$\frac{\mathrm{S}+\mathrm{T}}{2}=\frac{\sqrt{2}\,.\operatorname{cn}^2u}{\sqrt{1-k^2\operatorname{sn}^4u}},\quad \frac{\mathrm{S}-\mathrm{T}}{2}=\frac{\sqrt{2}\,.\,k'\operatorname{sn}^2u}{\sqrt{1-k^2\operatorname{sn}^4u}},$$

et par conséquent

$$\operatorname{dn}2v=\frac{\operatorname{cn}^2u+k'\operatorname{sn}^2u}{\operatorname{dn}^2u},\quad \operatorname{cn}2v=\frac{\operatorname{cn}^2u-k'\operatorname{sn}^2u}{\operatorname{dn}^2u},$$

ou, sous une autre forme,

$$(14)\qquad \left\{\begin{array}{l}\operatorname{dn}2v=\operatorname{cn}u\operatorname{snc}u+\operatorname{sn}u\operatorname{cnc}u,\\ \operatorname{cn}2v=\operatorname{cn}u\operatorname{snc}u-\operatorname{sn}u\operatorname{cnc}u.\end{array}\right.$$

1365. Puisque $\frac{u}{v}$ est constant, on aura, pour $u = \text{K}$, $v = \frac{1+k'}{2}\text{K}$. Or les formules précédentes donnent, pour $u = \text{K}$, $\text{cn}\, v = 0$, sans que la fonction $\text{cn}\, v$ puisse s'évanouir pour une valeur de u comprise entre 0 et K, et, comme u et v croissent dans le même sens, il faut que la valeur $\frac{1+k'}{2}\text{K}$ soit égale au quadrant elliptique L correspondant au module l. On a donc

$$\text{L} = \frac{1+k'}{2}\text{K}. \tag{15}$$

De même, si l'on change u en iu, v se change en iv, et la valeur (12) de $\text{cn}\, v$ devient

$$\frac{1}{\text{cn}'\, v} = \sqrt{\frac{2}{1-k'}}\sqrt{\frac{\text{dn}'\, u - k\,\text{cn}'\, u}{\text{dn}'\, u + \text{cn}'\, u}} = \sqrt{\frac{2}{1-k'}}\sqrt{\frac{1-k'\,\text{snc}'\, u}{1+\text{snc}'\, u}}.$$

On aura $\text{cn}' v = 0$, et par suite $v =$ le quadrant complémentaire L' correspondant au module l', lorsqu'on donnera à u une valeur telle que l'on ait

$$\text{snc}'\, u = \text{sn}'(\text{K}' \pm u) = -1 = \text{sn}'\, 3\text{K}', \quad \text{K}' \pm u = 3\text{K}',$$

d'où $\pm u = 2\text{K}'$. Comme u et v sont de même signe, on prendra ici le signe $+$, de sorte que $2\text{K}'$ et L' sont deux valeurs correspondantes de u et de v. Donc le rapport de ces deux valeurs est $\frac{1+k'}{2}$, c'est-à-dire que l'on a

$$\text{L}' = \frac{1+k'}{2}\cdot 2\text{K}' = (1+k')\text{K}'. \tag{16}$$

Les équations (15) et (16) donnent

$$\frac{\text{L}'}{\text{L}} = 2\frac{\text{K}'}{\text{K}}, \quad \text{ou} \quad \frac{\text{K}'}{\text{K}} = \frac{1}{2}\frac{\text{L}'}{\text{L}}. \tag{17}$$

Donc, si l'on désigne par

$$r = e^{-\pi\frac{\text{L}'}{\text{L}}}$$

ce que devient la quantité q lorsqu'on change k en l, on aura

$$r = q^2, \quad q = \sqrt{r}. \tag{18}$$

1366. Si l'on représente $\operatorname{sn} u$ par z, $\operatorname{sn} v$ par y, l'équation (10)

$$y\sqrt{l} = \frac{\sqrt{1+kz} - \sqrt{1-kz}}{\sqrt{1+kz} + \sqrt{1-kz}}$$

pourra s'écrire sous la forme

$$(19) \qquad kz = \frac{2\sqrt{l}.y}{1+ly^2}.$$

Telle est la forme la plus simple de la relation entre les fonctions $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{sn} v$, qui a fait donner au passage de l'une de ces valeurs à l'autre le nom de *transformation du second degré* [1363].

1367. La transformation que nous venons d'exposer, et dont la découverte est due à Landen, fournit une des méthodes les plus simples pour le calcul numérique des intégrales de première espèce.

Si l'on applique plusieurs fois de suite cette transformation, on obtiendra une série indéfinie de modules complémentaires

$$k', \; k'_1, \; k'_2, \; \ldots, \; k'_p, \; \ldots,$$

dont chacun se déduit du précédent en vertu de la formule

$$(20) \qquad k'_p = \frac{2\sqrt{k'_{p-1}}}{1+k'_{p-1}}.$$

Le calcul des quantités k'_p acquiert une grande symétrie si l'on pose

$$(21) \qquad k' = \frac{n}{m}, \quad k'_1 = \frac{n_1}{m_1}, \quad \ldots, \quad k'_p = \frac{n_p}{m_p}, \quad \ldots,$$

auquel cas la formule (20) devient

$$\frac{n_p}{m_p} = \frac{\sqrt{m_{p-1}n_{p-1}}}{\frac{1}{2}(m_{p-1}+n_{p-1})};$$

le rapport des nombres n_p, m_p étant seul déterminé, on pourra supposer ces nombres respectivement égaux aux deux termes de la fraction du second membre, ce qui donne

$$m_p = \frac{m_{p-1}+n_{p-1}}{2}, \quad n_p = \sqrt{m_{p-1}n_{p-1}}.$$

La détermination de ces deux suites de *nombres modulaires* se fera donc par le calcul de deux suites de moyennes, les unes arithmétiques, les autres géométriques. On aura ainsi successivement

$$m=1,\quad m_1=\frac{m+n}{2},\quad m_2=\frac{m_1+n_1}{2},\quad \ldots,$$

$$n=k',\quad n_1=\sqrt{mn},\quad n_2=\sqrt{m_1 n_1},\quad \ldots.$$

Ces deux suites sont l'une décroissante, l'autre croissante, et chaque nombre de la seconde est toujours moindre que son correspondant de la première, tandis que la différence de ces deux nombres décroît indéfiniment. Les nombres des deux suites tendent ainsi vers une limite commune η, comprise entre 1 et k', et dont ils se rapprochent très-rapidement.

En même temps, les rapports (21) convergent vers l'unité, et, au bout d'un petit nombre d'opérations, on parviendra à une valeur k'_p sensiblement $=1$. On pourra considérer alors $k_p=\sqrt{1-k'^2_p}$ comme nul, et par suite K_p comme égal à $\frac{\pi}{2}$. C'est ce qui résulte de la relation (17) du n° 1365, d'après laquelle on a

$$\frac{K'_p}{K_p}=2^p\,\frac{K'}{K}.$$

K_p ne pouvant jamais devenir moindre que $\frac{\pi}{2}$, K'_p doit donc croître indéfiniment, et, par suite, k'_p doit converger vers l'unité et k_p vers zéro.

1368. Cela posé, la relation entre deux quadrants consécutifs

$$K_{p-1}=\frac{2}{1+k'_{p-1}}\,K_p=\frac{m_{p-1}}{m_p}\,K_p$$

amènera la suite d'égalités

$$\frac{K}{K_1}=\frac{m}{m_1},\quad \frac{K_1}{K_2}=\frac{m_1}{m_2},\quad \ldots,\quad \frac{K_{p-1}}{K_p}=\frac{m_{p-1}}{m_p},$$

qui, étant multipliées entre elles, donnent

$$K=\frac{m}{m_p}\,K_p.$$

Si p est assez grand pour qu'on puisse supposer m_p égal à la limite η, et $K_p = \frac{\pi}{2}$, on aura alors, à cause de $m = 1$,

$$K = \frac{1}{\eta}\frac{\pi}{2}.$$

Si l'on fait le calcul analogue en remplaçant le module k' par k, on obtiendra la valeur du quadrant complémentaire K', et par suite celles de

$$\rho = \eta K', \quad q = e^{-2\rho}, \text{ etc.}$$

1369. Considérons maintenant une intégrale elliptique de première espèce et d'argument quelconque, donnée par son module k et par une quelconque de ses fonctions inverses $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, ..., ou, ce qui revient au même, par son amplitude φ :

$$F(\varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}.$$

Aux diverses valeurs de k'_p obtenues par la transformation précédente correspondent diverses valeurs de $\operatorname{dn} u$ ou $\Delta\varphi$. En remplaçant k'_p par sa valeur (21), et posant

$$\nabla_p = \sqrt{m_p^2 \cos^2\varphi_p + n_p^2 \sin^2\varphi_p},$$

on aura, pour la $p^{\text{ième}}$ valeur transformée,

$$\operatorname{dn} u_p = \frac{\nabla_p}{m_p}.$$

Si l'on substitue dans la troisième équation (12) du n° 1364,

$$\operatorname{dn} u_1 = \sqrt{\frac{2}{1+k'}}\sqrt{\frac{\operatorname{dn} u + k'}{\operatorname{dn} u + 1}},$$

la valeur précédente, on aura généralement

$$\frac{\nabla_p}{m_p} = \sqrt{\frac{m_{p-1}}{m_p}}\sqrt{\frac{n_{p-1} + \nabla_{p-1}}{m_{p-1} + \nabla_{p-1}}}.$$

En posant maintenant

$$\mu_p = \frac{\nabla_p}{m_p}, \quad \nu_p = \frac{n_p}{\nabla_p},$$

on en tire les deux formules

$$\mu_p = \sqrt{\frac{m_{p-1}\mu_{p-1}}{m_p}} \sqrt{\frac{1+\nu_{p-1}}{1+\mu_{p-1}}}, \quad \nu_p = \sqrt{\frac{m_{p-1}\nu_{p-1}}{m_p}} \sqrt{\frac{1+\mu_{p-1}}{1+\nu_{p-1}}},$$

au moyen desquelles on formera deux suites de nombres,

$$\mu, \ \mu_1, \ \mu_2, \ \ldots, \ \mu_p, \ \ldots,$$
$$\nu, \ \nu_1, \ \nu_2, \ \ldots, \ \nu_p, \ \ldots,$$

correspondants aux nombres modulaires m_p, n_p.

Les nombres $\nabla_p = m_p \mu_p = \frac{n_p}{\nu_p}$ tendront vers la limite

$$\sqrt{\eta^2 \cos^2 \varphi_\infty + \eta^2 \sin^2 \varphi_\infty} = \eta,$$

et par suite les nombres μ_p, ν_p vers l'unité; donc $\frac{\nabla_p}{m_p}$ tendra aussi vers l'unité. Or on a, d'après les formules de transformation (8) du n° 1363,

$$u_{p-1} = \frac{m_{p-1}}{m_p} u_p,$$

d'où l'on conclut, comme au n° 1368, pour p suffisamment grand,

$$u = \frac{u_p}{\eta}.$$

Donc la limite de u_p est ηu ou x.

De plus, par la quatrième formule (12) du n° 1364,

$$\operatorname{tn} u_{p-1} = \frac{m_{p-1}}{m_p} \frac{\operatorname{tn} u_p}{\operatorname{dn} u_p} = \frac{m_{p-1}}{\nabla_p} \operatorname{tn} u_p,$$

et, lorsque p est assez grand et k_p sensiblement nul, $\operatorname{tn} u_p$ se confond avec $\operatorname{tang} u_p$ ou $\operatorname{tang} x$. On a donc, en multipliant entre elles les égalités

$$\operatorname{tn} u = \frac{m}{\nabla_1} \operatorname{tn} u_1, \quad \operatorname{tn} u_1 = \frac{m_1}{\nabla_2} \operatorname{tn} u_2, \quad \ldots,$$

l'équation

$$\operatorname{tn} u = \operatorname{tang} \varphi = \frac{m}{\nabla_1} \frac{m_1}{\nabla_2} \cdots \frac{m_{p-1}}{\nabla_p} \operatorname{tang} x,$$

d'où l'on tire, à cause de $m = 1$ et de $\nabla_p = \eta$,

$$\operatorname{tang} x = \eta . \mu_1 \mu_2 \ldots \mu_{p-1} \operatorname{tang} \varphi.$$

Connaissant x au moyen de cette équation, on en déduira la valeur de

$$F(\varphi) = u = \frac{x}{\eta}.$$

On aurait également pu, en partant des formules

$$\operatorname{sn} u_1 = \frac{(1+k')\operatorname{sn} u}{1+\operatorname{dn} u}, \quad \operatorname{snc} u_1 = \frac{(1+k')\operatorname{cn} u}{k'+\operatorname{dn} u},$$

calculer des expressions de $\sin x$, $\cos x$, analogues à celles de $\operatorname{tang} x$.

Le calcul numérique de ces expressions est notablement simplifié par l'emploi des logarithmes d'addition et de soustraction.

1370. Les mêmes nombres modulaires qui ont servi à calculer K peuvent aussi conduire à la valeur de q, et par suite aussi à la valeur de K'. Pour le démontrer, posons

$$T = \frac{1-q}{1+q}\left(\frac{1-q^2}{1+q^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1-q^4}{1+q^4}\right)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{1-q^8}{1+q^8}\right)^{\frac{1}{8}}\cdots,$$

produit dont il est facile d'établir la convergence, lorsque q est moindre que l'unité. En vertu des identités

$$\begin{aligned} 1-q^2 &= (1-q)(1+q),\\ 1-q^4 &= (1-q^2)(1+q^2),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

le produit pourra se mettre successivement sous les formes suivantes :

$$\begin{aligned} T &= (1-q)\left(\frac{1-q}{1+q}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1-q^2}{1+q^2}\right)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{1-q^4}{1+q^4}\right)^{\frac{1}{8}}\cdots\\ &= (1-q)(1-q)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1-q}{1+q}\right)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{1-q^2}{1+q^2}\right)^{\frac{1}{8}}\cdots\\ &= (1-q)(1-q)^{\frac{1}{2}}(1-q)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{1-q}{1+q}\right)^{\frac{1}{8}}\cdots\\ &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

ou enfin

$$T = (1-q)^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots} = (1-q)^2,$$

ce que l'on aurait pu conclure immédiatement de la première transformation, qui peut s'écrire sous la forme

$$T = (1 - q)\sqrt{T}.$$

On a donc, quel que soit q,

$$1 - q = \left(\frac{1 - q}{1 + q}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1 - q^2}{1 + q^2}\right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{1 - q^4}{1 + q^4}\right)^{\frac{1}{8}} \cdots.$$

Or nous avons trouvé [1336]

$$\sqrt[4]{k'} = \prod_0^\infty \frac{1 - q^{2n+1}}{1 + q^{2n+1}},$$

et par suite, la transformation de Landen changeant q en q^2 [1365],

$$\sqrt[4]{k'_1} = \prod_0^\infty \frac{1 - q^{2(2n+1)}}{1 + q^{2(2n+1)}},$$

$$\sqrt[4]{k'_2} = \prod_0^\infty \frac{1 - q^{4(2n+1)}}{1 + q^{4(2n+1)}},$$

. . . .

Donc le produit

$$\sqrt[4]{k' k_1'^{\frac{1}{2}} k_2'^{\frac{1}{4}} k_3'^{\frac{1}{8}} \dots k_p'^{\frac{1}{2^p}} \dots}$$

est égal au produit de toutes les expressions

$$\frac{1 - q^{2n+1}}{1 + q^{2n+1}} \left(\frac{1 - q^{2(2n+1)}}{1 + q^{2(2n+1)}}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1 - q^{4(2n+1)}}{1 + q^{4(2n+1)}}\right)^{\frac{1}{4}} \cdots = (1 - q^{2n+1})^2,$$

dans lequel on aura donné à n toutes les valeurs entières, de zéro à l'infini. Donc

$$(1) \qquad \sqrt[4]{k' k_1'^{\frac{1}{2}} k_2'^{\frac{1}{4}} \dots} = \prod_0^\infty (1 - q^{2n+1}).$$

Or, d'après ce que nous avons établi au n° 1336, on a

$$\frac{2q^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{k}} = \frac{M'^2}{M^2}, \quad \sqrt{k'} = \frac{N'^2}{M'^2},$$

d'où l'on tire, en vertu de la relation $MM'N' = 1$,

$$\frac{2q^{\frac{1}{4}}k'}{\sqrt{k}} = \frac{N'^4}{M^2M'^2} = N'^6 = \prod_0^\infty (1 - q^{2n+1})^6.$$

Donc, en vertu de la formule (1), on aura

$$q^{\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{k}}{2k'^4}\left(k' k_1'^{\frac{1}{2}} k_2'^{\frac{1}{4}} \ldots\right)^{\frac{3}{4}},$$

ou, en mettant pour k', k_1', ... leurs expressions au moyen des nombres modulaires,

$$(2)\qquad q = \frac{k^2}{16k'}\left[\left(\frac{n_1}{m_1}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{n_2}{m_2}\right)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{n_3}{m_3}\right)^{\frac{1}{8}}\cdots\right]^3.$$

Connaissant q, on en tirera les valeurs de

$$(3)\qquad \rho = \frac{1}{2}\log\frac{1}{q} = \eta K', \quad K' = \frac{1}{2\eta}\log\frac{1}{q}.$$

1371. On peut encore déduire des formules de transformation établies au n° 1364 une méthode très-prompte pour calculer dans tous les cas la valeur d'une intégrale de première espèce, donnée par son module et son amplitude. Cette méthode est surtout commode lorsqu'on fait usage des Tables qui donnent les valeurs de $\log\frac{1+x}{1-x}$ correspondantes à celles de $\log x$.

En appliquant à l'intégrale u deux transformations successives, la première changeant (u, k, q) en (v, l, q^2), la seconde changeant (v, l, q^2) en (w, λ, q^4), les formules (14) du n° 1364 donneront

$$\operatorname{cn} 2w = \operatorname{cn} v \operatorname{snc} v - \operatorname{sn} v \operatorname{cnc} v,$$
$$\operatorname{dn} 2w = \operatorname{cn} v \operatorname{snc} v + \operatorname{sn} v \operatorname{cnc} v.$$

Si l'on remplace maintenant les fonctions de v par leurs valeurs tirées des formules (12) et (13) du même numéro, on trouvera, par un calcul facile,

$$\frac{\operatorname{cn} 2w}{\operatorname{dn} 2w} = \frac{1+\sqrt{k'}}{1-\sqrt{k'}}\,\frac{\operatorname{dn} u - \sqrt{k'}}{\operatorname{dn} u + \sqrt{k'}}.$$

Exprimons maintenant le rapport $\frac{\operatorname{cn} 2w}{\operatorname{dn} 2w}$ au moyen des fonctions ϑ, en remarquant que la transformation de Landen, laissant le rapport $\frac{u}{v} = \frac{K}{L}$ constant, ne change pas la valeur du rapport

$$\frac{\pi u}{2K} = \frac{\pi v}{2L} = x;$$

il viendra

$$\frac{\operatorname{cn} 2w}{\operatorname{dn} 2w} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \frac{\vartheta_2(2x, q^4)}{\vartheta_3(2x, q^4)}.$$

A l'aide des relations

$$\lambda = \frac{1-l'}{1+l'}, \quad l' = \frac{2\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}}, \quad \text{d'où} \quad \sqrt{\lambda} = \frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}},$$

on en tire

$$(4) \qquad \frac{1}{2} \frac{\operatorname{dn} u - \sqrt{k'}}{\operatorname{dn} u + \sqrt{k'}} = \frac{q(\cos 2x + q^8 \cos 6x + \ldots)}{1 + 2q^4 \cos 4x + 2q^{16} \cos 8x + \ldots}.$$

Si l'on fait maintenant $x = 0$ dans cette équation, et que l'on pose

$$\alpha = \frac{1}{2} \frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}},$$

il vient

$$(5) \qquad \alpha = \frac{q(1 + q^8 + q^{24} + \ldots)}{1 + 2q^4 + 2q^{16} + \ldots},$$

équation d'où l'on peut tirer la valeur de q au moyen de celle de α, soit par la méthode des substitutions successives, soit en développant q suivant les puissances de α par la méthode des coefficients indéterminés. Dans ce dernier cas, on aura une série de la forme

$$q = a_0 \alpha + a_1 \alpha^5 + a_2 \alpha^9 + \ldots.$$

En effectuant le calcul des coefficients, on trouve

$$(6) \qquad q = \alpha + 2\alpha^5 + 15\alpha^9 + 150\alpha^{13} + \ldots.$$

Si l'on développe à son tour α en fonction de k, on obtiendra

cette autre série

$$(7) \qquad q = \frac{k^2}{16} + \frac{k^4}{32} + \frac{21 k^6}{1024} + \ldots.$$

Connaissant q, on en tirera successivement

$$(8) \quad \begin{cases} \dfrac{2K}{\pi} = [\vartheta_3(0)]^2 = (1 + 2\alpha)^2(1 + 4\alpha^4 + 36\alpha^8 + \ldots, \\ \rho = \dfrac{1}{2}\log\dfrac{1}{q}, \\ K' = \dfrac{2K}{\pi}\rho = \rho(1 + 2\alpha)^2(1 + 4\alpha^4 + \ldots) = \rho(1 + 4q + \ldots). \end{cases}$$

Pour avoir maintenant u, représentons la quantité $\dfrac{\operatorname{dn} u}{\sqrt{k'}}$ ou $\dfrac{\Delta\varphi}{\sqrt{k'}}$ par $\dfrac{1+\xi}{1-\xi}$, d'où

$$\xi = \frac{\Delta\varphi - \sqrt{k'}}{\Delta\varphi + \sqrt{k'}}.$$

L'équation (4) deviendra, en y négligeant les puissances de q ou de α supérieures à la huitième,

$$(9) \qquad \cos 2x = \frac{\xi}{2\alpha}[1 - 4\alpha^4(1 + 5\alpha^4)\sin^2 2x].$$

En résolvant cette équation par approximations successives, lorsque α^4 n'est pas négligeable, on aura la valeur de $2x$, et par suite celle de

$$F(\varphi) = u = \frac{K}{\pi}\cdot 2x.$$

1372. Tant que les quantités k et q ne sont pas très-voisines de l'unité, ces formules seront rapidement convergentes. Ainsi, pour $\theta = \arcsin k < \frac{\pi}{4}$, on a $q < \frac{1}{23}$, d'où $q^4 < \frac{1}{280000}$, de sorte que la huitième puissance de q est sans influence sur la dixième décimale.

Mais si k et q approchent de l'unité, on prendra, au lieu des formules précédentes, cette autre série de formules, d'autant plus avantageuse que k et q seront plus voisins de 1 ; ces formules se déduiront sans peine des précédentes, en prenant pour ϑ_2 et ϑ_3 les

expressions (14) du n° 1346.

$$(10) \begin{cases} \alpha' = \frac{1}{2}\frac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}}, \quad \frac{\Delta\varphi}{\sqrt{k}.\cos\varphi} = \frac{1}{\sqrt{k}}\sqrt{1+k'^2\tang^2\varphi} = \frac{1+\xi'}{1-\xi'}, \\ \xi' = \frac{\Delta\varphi - \sqrt{k}.\cos\varphi}{\Delta\varphi+\sqrt{k}.\cos\varphi}, \\ q' = \alpha' + 2\alpha'^5 + 15\alpha'^9 + \ldots = \frac{k'^2}{16} + \frac{k'^4}{32} + \frac{21k'^6}{1024} + \cdots, \\ \frac{2K'}{\pi} = [\vartheta_3(0, q')]^2 = (1+2\alpha')^2(1+4\alpha'^4+\ldots), \\ \rho' = \frac{1}{2}\log q', \quad K = \frac{2K'}{\pi}\rho', \\ \text{Ch}\, 2x' = \frac{\xi'}{2\alpha'}[1+4\alpha'(1+5\alpha'^4)\,\text{Sh}^2 2x'], \quad F(\varphi) = u = \frac{K'}{\pi}.2x'. \end{cases}$$

1373. *Exemple.* — Proposons-nous de calculer la valeur de l'intégrale

$$u = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

correspondante aux valeurs

$$\varphi = 0^q,9 (= 81^\circ),$$
$$k = \sin 0^q,8 \; (= \sin 72^\circ).$$

Nous supposerons que le lecteur ait entre les mains une Table des logarithmes d'addition et de soustraction, disposée, par exemple, comme celle qui est contenue dans les pages 8 à 11 de notre *Recueil de formules et de Tables numériques*. De plus, on a un immense avantage à employer, dans ces sortes de calculs, les Tables construites suivant la division décimale du quadrant, telles que les Tables de Plauzoles, ou celles de Hobert et Ideler.

Il faut commencer par calculer les valeurs des constantes K, q, K′, qui dépendent du module k. Nous emploierons d'abord la transformation de Landen. On a les valeurs logarithmiques suivantes :

$k = \sin\theta$ . . . . $\bar{1},97820\ 6$

$k' = \cos\theta$ . . . . $\bar{1},48998\ 2$

d'où

$m = 1$	0,00000
$n = k'$	$\bar{1}$,48998
$\frac{n}{m}$	$\bar{1}$,48998
$1 + \frac{n}{m}$	0,11695
$\frac{m}{2}$	$\bar{1}$,69897
mn	$\bar{1}$,48998
$m_1 = \frac{m+n}{2}$	$\bar{1}$,81592
$n_1 = \sqrt{mn}$	$\bar{1}$,74499
$\frac{n_1}{m_1}$	$\bar{1}$,92907
$1 + \frac{n_1}{m_1}$	0,26701
$\frac{m_1}{2}$	$\bar{1}$,51489
$m_1 n_1$	$\bar{1}$,56091
$m_2 = \frac{m_1 + n_1}{2}$	$\bar{1}$,78190
$n_2 = \sqrt{m_1 n_1}$	$\bar{1}$,78046
$\frac{n_2}{m_2}$	$\bar{1}$,99856
$1 + \frac{n_2}{m_2}$	0,30031
$\frac{m_2}{2}$	$\bar{1}$,48087
$m_2 n_2$	$\bar{1}$,56236
$m_3 = n_3 = \eta$	$\bar{1}$,78118
$\frac{\pi}{2}$	0,19612
$K = \frac{\pi}{2\eta}$	0,41494

Pour calculer q, nous prendrons la formule (2) du n° 1370. On trouve

$\left(\frac{n_1}{m_1}\right)^{\frac{1}{2}}$	$\bar{1},96454$
$\left(\frac{n_2}{m_2}\right)^{\frac{1}{4}}$	$\bar{1},99964$
h	$\bar{1},96418$
h^3	$\bar{1},89254$
k^2	$\bar{1},95641$
$16k'$	$0,69410$
q	$\bar{1},15485$
$\frac{1}{q}$	$0,84515$
log déc $\frac{1}{q}$	$\bar{1},92694$
mod. des log. déc	$0,36222$
$2q$ ....(—)	$0,08221$
K'	$0,20695$

Le calcul aurait été un peu plus simple si l'on avait commencé par la détermination de K'. On aurait eu, de cette manière,

$m' = 1$	$0,00000$
$n' = k$	$\bar{1},97821$
$\frac{n'}{m'}$	$\bar{1},97821$
$1 + \frac{n'}{m'}$	$0,29027$
$\frac{m'}{2}$	$\bar{1},69897$
$m'n'$	$\bar{1},97821$

m'_1	$\bar{1},98924$
n'_1	$\bar{1},98910$
$\dfrac{n'_1}{m'_1}$	$\bar{1},99986$
$1+\dfrac{n'_1}{m'_1}$	$0,30096$
$\dfrac{m'_1}{2}$	$\bar{1},68821$
$m'_1 n'_1$	$\bar{1},97834$
$m'_2 = n'_2 = \eta'$	$\bar{1},98917$
$\dfrac{\pi}{2}$	$0,19612$
K'	$0,20695$
$\left(\dfrac{n'_1}{m'_1}\right)^{\frac{3}{2}}$	$\bar{1},99979$
k'^2	$\bar{2},97996$
$16k$ (—)	$1,18233$
q'	$\bar{3},79742$
$\dfrac{1}{q'}$	$2,20258$
$\log \dfrac{1}{q'}$	$0,34293$
mod. des log. déc.	$0,36222$
$2\eta'$ (—)	$0,29020$
K	$0,41495$

On peut apprécier d'après cela l'avantage que l'on a, dans les cas ordinaires, à commencer par le calcul du plus petit des deux quadrants K, K′.

On a maintenant

$\sin\varphi$	$\bar{1},9946199$

$\sin^2\varphi$	$\bar{1}$,98923 98
k^2....................	$\bar{1}$,95641 26
$k^2\sin^2\varphi$	$\bar{1}$,94565 24
$1 - k^2\sin^2\varphi = \Delta^2\varphi$.....	$\bar{1}$,07050 55
$\Delta\varphi = \nabla = \mu$...........	$\bar{1}$,53525
$n = k'$..............	$\bar{1}$,48998
ν....................	$\bar{1}$,95473

$\frac{m}{m_1}$...............	0,18404	......	0,18404	$1+\nu$....	0,27898
μ................	$\bar{1}$,53525	ν......	$\bar{1}$,95473	$1+\mu$...	0,12807
$\left(\frac{1+\nu}{1+\mu}\right)^{\pm 1}$.....(+)	15091	...(—)	15091		
μ_1^2...............	$\bar{1}$,87024	ν_1^2.....	$\bar{1}$,98790		
$\frac{m_1}{m_2}$..............	0,03402	......	0,03402	$1+\nu_1$...	0,29802
μ_1...............	$\bar{1}$,93512	ν_1.....	$\bar{1}$,99395	$1+\mu_1$...	0,26980
$\left(\frac{1+\nu_1}{1+\mu_1}\right)^{\pm 1}$ ...(+)	2822	...(—)	2822		
μ_2^2..............	$\bar{1}$,99736	ν_2^2.....	$\bar{1}$,99975		
$\frac{m_2}{m_3}$..............	0,00072	......	0,00072	$1+\nu_2$...	0,30097
μ_2...............	$\bar{1}$,99868	ν_2.....	$\bar{1}$,99988	$1+\mu_2$...	0,30037
$\left(\frac{1+\nu_2}{1+\mu_2}\right)^{\pm 1}$.....(+)	60	...(—)	60		
μ_3^2..............	0,00000	ν_3^2....	0,00000	$\mu_3 = \nu_3 = 1$	

η................	$\bar{1}$,78118
μ_1.....	$\bar{1}$,93512
μ_2.........	$\bar{1}$,99868
$\operatorname{tang}\varphi$....	0,80029

$\operatorname{tang} x$	$0,51527$

$$x = 0^q,81136$$

x (en quadr.)	$\bar{1},90922$
K	$0,41495$
u	$0,32417$

On aurait pu aussi calculer directement $K - u$ en remplaçant $\operatorname{dn} u$ et $\operatorname{tn} u$ par $\operatorname{dnc} u = \frac{k'}{\Delta\varphi}$, $\operatorname{tnc} u = \frac{1}{k' \operatorname{tang} \varphi}$, ce qui aurait un peu abrégé les opérations.

Appliquons maintenant au même exemple la méthode du n° 1371. Il est avantageux dans ce cas de faire usage de la Table qui donne la valeur de la fonction $\log \frac{1+x}{1-x}$ pour chaque valeur de $\log x$.

Dans l'exemple actuel, on a

$\sqrt{k'}$	$\bar{1},74499$
$\frac{1+\sqrt{k'}}{1-\sqrt{k'}} = \frac{1}{2\alpha}$	$0,54449$
2α	$\bar{1},45551$
α	$\bar{1},15448$
α^4	$\bar{4},61792$
$1 + 2\alpha^4$	36
$\alpha(1 + 2\alpha^4) = q$	$\bar{1},15484$
$(1 + 2\alpha)^2$	$0,21812$
$1 + 4\alpha^4$	72
$\frac{\pi}{2}$	$0,19612$
K	$0,41496$

$\Delta\varphi$	$\bar{1},53525$
$\sqrt{k'}$	$\bar{1},74499$
$\dfrac{\Delta\varphi}{\sqrt{k'}}$	$\bar{1},79026$
$\xi = -\dfrac{1-\dfrac{\Delta\varphi}{\sqrt{k'}}}{1+\dfrac{\Delta\varphi}{\sqrt{k'}}}$	$-\bar{1},37454$
2α	$\bar{1},45551$
$\cos 2x_1$	$-\bar{1},91903$

$$2x_1 = 1^q,62322$$

$\sin^2 2x_1$	$\bar{1},493$
$-4\alpha^4$	$-\bar{3},220$
$-4\alpha^4\sin^2 2x_1$	$-\bar{4},713$
$1-4\alpha^4\sin^2 2x_1$ ..... (—)	23
$\cos 2x$	$-\bar{1},91880$

$$2x = 1^q,62272$$

$$x = 0^q,81136$$

etc....

§ VIII.

DES INTÉGRALES ELLIPTIQUES DE SECONDE ESPÈCE.

1374. Soit l'intégrale

$$v = \int_0^z dz\sqrt{\frac{1-k^2z^2}{1-z^2}}.$$

En suivant la même méthode qu'au n° **1262**, on verrait d'abord que cette intégrale admet les mêmes points de ramification et les mêmes contours élémentaires que l'intégrale elliptique de première espèce.

Si l'on parcourt le contour élémentaire $(+1)$, l'intégrale prise

le long de ce contour sera égale à $2E$, E étant l'*intégrale complète de seconde espèce*

$$E = \int_0^1 dz \sqrt{\frac{1 - k^2 z^2}{1 - z^2}}.$$

On reconnaît ensuite que, si l'on parcourt alternativement les contours élémentaires $(+1)$ et (-1), l'intégrale croîtra d'un multiple de la période $2E$, le radical ayant, à la fin, le même signe qu'au départ ou un signe contraire, suivant que le multiple en question sera pair ou impair.

1375. Supposons maintenant que l'on parcoure le contour $\left(+\frac{1}{k}\right)$, en évitant le point $+1$ sur un demi-cercle supérieur, de rayon infiniment petit r. On aura d'abord, de 0 à $1-r$, l'intégrale

$$\int_0^{1-r} dz \sqrt{\frac{1 - k^2 z^2}{1 - z^2}},$$

dont la limite est E.

Si l'on pose

$$z = 1 + re^{ip}, \quad Z = \sqrt{\frac{1 - k^2 z^2}{1 + z}},$$

l'intégrale prise le long du demi-cercle sera

$$-r^{\frac{1}{2}} \int_\pi^0 Z e^{\frac{1}{2} ip} \, dp,$$

ou, Z étant sensiblement constant,

$$(2 + 2i) r^{\frac{1}{2}} Z.$$

Donc l'intégrale prise à partir de $z = 1 + r$ aura une valeur imaginaire positive, de la forme $+ih^2$: telle sera donc la forme de l'intégrale

$$\int_{1+r}^{\frac{1}{k} - r'} dz \sqrt{\frac{1 + k^2 z^2}{1 - z^2}},$$

dont la limite est

$$\int_1^{\frac{1}{k}} dz\sqrt{\frac{1-k^2z^2}{1-z^2}}.$$

Si l'on fait, dans cette dernière intégrale,

$$z^2 = \frac{1}{1+k'^2z'^2},$$

elle prendra la forme

$$ik'^2\int_0^1 dz'\sqrt{\frac{1-z'^2}{(1-k'^2z'^2)^3}} = i\int_0^1\left(1-\frac{k^2}{1-k'^2z'^2}\right)\frac{dz'}{\sqrt{(1-z'^2)(1-k'^2z'^2)}},$$

ou bien, en introduisant l'amplitude $\varphi' = \arc\sin z'$, et posant $\Delta'\varphi' = \sqrt{1-k'^2z^2}$,

$$ik'^2\int_0^1 dz'\sqrt{\frac{1-z'^2}{(1-k'^2z'^2)^3}} = i\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{d\varphi'}{\Delta\varphi'} - k^2\frac{d\varphi'}{\Delta'^3\varphi'}\right).$$

Or on a [1305], en faisant $\int_0^1 \frac{d\varphi}{\Delta'^3\varphi'} = V_1$,

$$-\frac{k^2}{k'^2}V_1 + \frac{1}{k'^2}V_{-1} = \frac{\sin\varphi'\cos\varphi'}{\Delta'\varphi'},$$

c'est-à-dire

$$-k^2\int_0^{\varphi'}\frac{d\varphi'}{\Delta'^3\varphi'} = -E'(\varphi') + \frac{k'^2\sin\varphi'\cos\varphi'}{\Delta'\varphi'},$$

l'intégrale $E'(\varphi')$ correspondant, comme $\Delta'\varphi'$, au module k'.

Donc

$$\int dz\sqrt{\frac{1-k^2z^2}{1-z^2}} = i\left(\int\frac{d\varphi'}{\Delta'\varphi'} - \int\Delta'\varphi'\,d\varphi' + \frac{k'^2\sin\varphi'\cos\varphi'}{\Delta'\varphi'}\right),$$

et, par suite,

$$\int_1^{\frac{1}{k}} dz\sqrt{\frac{1-k^2z^2}{1-z^2}} = i(K'-E') = ig^2,$$

g^2 étant positif.

A partir de $z = \frac{1}{k}$ jusqu'à $z = \infty$, chacun des deux radicaux $\sqrt{1-z^2}$, $\sqrt{1-k^2z^2}$ ayant été multiplié par i, leur quotient sera réel et positif, et il en sera de même de l'élément de l'intégrale

$$\int_{\frac{1}{k}}^{\infty} dz \sqrt{\frac{1-k^2z^2}{1-z^2}} = f^2,$$

et par suite de l'intégrale elle-même.

Si maintenant, du centre O avec un rayon infiniment grand R, on décrit un quart de cercle allant de l'axe des x positifs à l'axe des y positifs, l'intégrale devient, pour $z = \mathrm{R}e^{ip}$,

$$\mathrm{R}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d.e^{ip}.\sqrt{\frac{k^2\mathrm{R}^2e^{2ip}-1}{\mathrm{R}^2e^{2ip}-1}} = k\mathrm{R}(i-1).$$

Enfin l'intégrale prise depuis $+i\infty$ jusqu'à o sera

$$i\int_{\mathrm{R}}^{0} dy \sqrt{\frac{1+k^2y^2}{1+y^2}} = -ih.$$

En égalant à zéro l'intégrale prise le long du contour total du quart de cercle, dont l'aire ne contient aucun point de ramification, on aura l'égalité

$$\mathrm{E} + i(\mathrm{K}' - \mathrm{E}') + f^2 + k\mathrm{R}(i-1) - ih = 0,$$

qui se décompose dans les deux suivantes :

$$\mathrm{E} + f^2 - k\mathrm{R} = 0, \quad \mathrm{K}' - \mathrm{E}' + k\mathrm{R} - h = 0.$$

Le terme f^2 étant positif, $-k\mathrm{R}$ doit être négatif, et, par suite, $+k\mathrm{R}$ doit être positif dans la seconde égalité. Donc l'intégrale $\int_{\mathrm{R}}^{0} dy \sqrt{\frac{1+k^2y^2}{1+y^2}}$ doit être négative, comme il était aisé de le voir *a priori*, et elle est infinie avec R.

On a donc enfin, pour l'intégrale prise de o à $+\frac{1}{k}$, suivant le chemin indiqué,

$$\mathrm{E} + i(\mathrm{K}' - \mathrm{E}').$$

Donc l'intégrale prise le long du second contour élémentaire sera

$$2E + 2i(K' - E').$$

Si l'on ajoute maintenant aux parcours répétés des quatre contours élémentaires un chemin rectiligne, et que v soit l'intégrale prise le long de ce chemin, lorsque les deux radicaux $\sqrt{1-z^2}$, $\sqrt{1-k^2z^2}$ partent de O avec la valeur $+1$, la valeur générale de l'intégrale $E(\varphi)$ ou $\text{el}\,u$ sera

$$\text{el}\,u = 2(m+n)E + 2ni(K'-E') + (-1)^{m+n}v,$$

ou, si l'on remplace $m+n$ par μ, n par ν,

$$\text{el}\,u = 2\mu E + 2\nu i(K'-E') + (-1)^{\mu}v.$$

1376. D'après la définition, on a

$$(1) \qquad \text{el}\,u = \int_0^{\varphi} \Delta\varphi\, d\varphi = \int_0^u \text{dn}^2 u\, du.$$

On en tire aisément [1308]

$$(2) \qquad k^2\int_0^u \text{sn}^2 u\, du = k^2\int_0^{\varphi} \frac{\sin^2\varphi}{\Delta\varphi}\, d\varphi = u - \text{el}\,u,$$

$$(3) \qquad k^2\int_0^u \text{cn}^2 u\, du = k^2\int_0^{\varphi} \frac{\cos^2\varphi}{\Delta\varphi}\, d\varphi = \text{el}\,u - k'^2 u,$$

$$(4) \qquad k'^2\int_0^u \text{tn}^2 u\, du = k'^2\int_0^{\varphi} \frac{\text{tang}^2\varphi}{\Delta\varphi}\, d\varphi = \text{tn}\,u\,\text{dn}\,u - \text{el}\,u.$$

Si l'on change u en iu, on a [1319]

$$\frac{1}{i}\,\text{el}(iu) = \int_0^u \text{dn}^2 iu\, du = \int_2^u \frac{\text{dn}'^2 u}{\text{cn}'^2 u}\, du = \int_0^z \frac{1-k'^2z^2}{1-z^2}\,\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k'^2z^2)}}$$

$$= k^2\int_0^z \frac{dz}{(1-z^2)\sqrt{(1-z^2)(1-k'^2z^2)}} + k'^2\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k'^2z^2)}}.$$

Or on déduit facilement, de la formule (1) du n° 1306,

$$k^2\int_0^u \frac{du}{\text{cn}'^2 u} = \text{tn}'u\,\text{dn}'u + k^2 u - \text{el}'u.$$

Donc

$$\frac{1}{i}\,\mathrm{el}\,iu = u - \mathrm{el}'\,u + \mathrm{tn}'\,u\,\mathrm{dn}'\,u. \tag{5}$$

1377. *Le théorème d'addition pour les intégrales de seconde espèce.* — Reprenons les notations du n° 827, V, et posons, de plus,

$$\mathrm{E}(\varphi) + \mathrm{E}(\chi) = \mathrm{U}.$$

On en tire, en différentiant,

$$\Delta\varphi\,d\varphi + \Delta\chi\,d\chi = d\mathrm{U}, \tag{6}$$

équation à laquelle il faut joindre la suivante :

$$\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} + \frac{d\chi}{\Delta\chi} = 0,$$

ou

$$\Delta\chi\,d\varphi + \Delta\varphi\,d\chi = 0.$$

Cette équation, ajoutée à l'équation (6), donne

$$d\mathrm{U} = (\Delta\varphi + \Delta\chi)(d\varphi + d\chi).$$

On a d'ailleurs, en posant $\varphi + \chi = p$,

$$\Delta\varphi + \Delta\chi = \mathrm{B}\sin p, \quad \text{où} \quad \mathrm{B} = \frac{\Delta\sigma + 1}{\sin\sigma};$$

donc

$$d\mathrm{U} = \mathrm{B}\sin p\,dp,$$

d'où

$$\mathrm{U} = -\mathrm{B}\cos p + \mathrm{C},$$

c'est-à-dire

$$\mathrm{E}(\varphi) + \mathrm{E}(\chi) = -\frac{\Delta\sigma + 1}{\sin\sigma}\cos(\varphi + \chi) + \mathrm{C}.$$

Pour déterminer la constante C, faisons $\varphi = 0$, d'où $\chi = \sigma$, et, par suite,

$$\mathrm{E}(\sigma) = -\frac{\Delta\sigma + 1}{\sin\sigma}\cos\sigma + \mathrm{C}.$$

On en tire, par soustraction,

$$\mathrm{E}(\varphi) + \mathrm{E}(\chi) - \mathrm{E}(\sigma) = -\frac{\Delta\sigma + 1}{\sin\sigma}\left[\cos(\varphi + \chi) - \cos\sigma\right],$$

ou, en vertu de la relation trouvée au n° 827,

$$\mathrm{E}(\varphi)+\mathrm{E}(\chi)-\mathrm{E}(\sigma)=\frac{\Delta\sigma+1}{\sin\sigma}\sin\varphi\sin\chi(1-\Delta\sigma),$$

ou enfin

$$\mathrm{E}(\varphi)+\mathrm{E}(\chi)-\mathrm{E}(\sigma)=k^2\sin\varphi\sin\chi\sin\sigma,$$

c'est-à-dire

$$(7)\qquad \mathrm{el}\,u+\mathrm{el}\,v-\mathrm{el}(u+v)=k^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{sn}(u+v).$$

Si l'on suppose

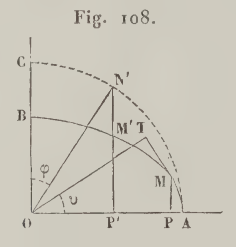
$$u+v=\mathrm{K},$$

il vient alors

$$\mathrm{el}\,u+\mathrm{el}(\mathrm{K}-u)-\mathrm{E}=k^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{snc}\,u=k^2\frac{\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{dn}\,u}.$$

1378. L'équation (3) conduit immédiatement au théorème de Fagnano [746]. Si l'on désigne, en effet, par $a\sin\varphi$, $b\cos\varphi$ les

Fig. 108.



coordonnées du point M' (*fig.* 108), et par $a\sin\chi$, $b\cos\chi$ celles du point M; si, de plus, on pose

$$\varphi=\mathrm{am}(u,k),\quad \chi=\mathrm{am}(v,k),$$

k étant égal à l'excentricité de l'ellipse, on aura, pour $v=\mathrm{K}-u$,

$$\mathrm{E}(\varphi)+\mathrm{E}(\chi)-\mathrm{E}=\frac{k^2\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta\varphi},$$

c'est-à-dire

$$\mathrm{BM'}-\mathrm{AM}=\frac{ak^2\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta\varphi},$$

expression égale à $-h$ ou à MT, si l'on a pris $\varphi=\upsilon$.

1379. Le théorème d'addition permet d'exprimer, à l'aide de fonctions d'arguments réels, une intégrale de seconde espèce ayant un argument complexe $u + iv$. On a, en effet, par la formule (7),

$$\mathrm{el}(u+iv) = \mathrm{el}\,u + \mathrm{el}\,iv - k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn} iv \operatorname{sn}(u+iv),$$

ou, en ayant égard aux formules du nº 1376,

$$(9)\quad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{el}(u+iv) &= \mathrm{el}\,u + i(v - \mathrm{el}'v + \mathrm{tn}'v\,\mathrm{dn}'v) \\ &\quad + k^2 \operatorname{sn} u\,\mathrm{tn}'v \cdot \frac{\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u \operatorname{sn}' u \operatorname{cn}' u - i \operatorname{sn} u \operatorname{dn}' v}{1 - \operatorname{dn}^2 u \operatorname{sn}'^2 v}. \end{aligned} \right.$$

1380. Des formules (23) du nº 1349 on tire, en différentiant,

$$2\sum_1^\infty n \frac{\cos 2nx}{\mathrm{Sh}\, 2n\rho} = \frac{1}{2} \mathrm{D}_x^2 \log \vartheta(x) = \frac{1}{2} \mathrm{D}_u \mathrm{Z}(u).$$

Substituant cette valeur dans la formule (24) du nº 1361, il vient

$$\operatorname{dn}^2 u = \eta^2 \left(1 + 2\sum_1^\infty \frac{1}{\mathrm{Ch}^2\, 2n\rho}\right) + \eta^2 \mathrm{D}_u \mathrm{Z}(u).$$

Si l'on intègre à partir de $u = 0$, on en tire

$$\mathrm{el}\,u = \eta^2 u \left(1 + 2\sum_1^\infty \frac{1}{\mathrm{Ch}^2\, 2n\rho}\right) + \eta^2 \mathrm{Z}(u).$$

En faisant, dans les deux membres, $u = \mathrm{K}$, l'équation devient

$$(10)\qquad \mathrm{E} = \eta^2 \mathrm{K} \left(1 + 2\sum_1^\infty \frac{1}{\mathrm{Ch}^2\, 2n\rho}\right),$$

d'où, en éliminant la somme infinie entre ces deux équations, et mettant pour η sa valeur $\frac{\pi}{2\mathrm{K}}$, on conclut la formule

$$(11)\qquad \mathrm{el}\,u = \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{K}} u + \mathrm{Z}(u) = \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{K}} u + \eta \mathrm{D}_x \log \vartheta(x).$$

1381. *Théorème de Legendre sur les intégrales complètes de première et de seconde espèce.* — Considérons les intégrales

$$F(\varphi)=\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}, \quad E(\varphi)=\int_0^\varphi \Delta\varphi\, d\varphi$$

comme des fonctions des deux variables indépendantes φ et k.

Si nous différentions $F(\varphi)$ par rapport à k, on aura

$$D_k F(\varphi)=\int_0^\varphi \frac{k\sin^2\varphi}{\Delta^3\varphi}\, d\varphi.$$

Or la formule (2) du n° 1306 donne, en y faisant $q=1$ et remarquant que l'on a

$$\int \frac{d\varphi}{\Delta^3\varphi}=\int d\varphi\left(\frac{1}{\Delta\varphi}+\frac{k^2\sin^2\varphi}{\Delta^3\varphi}\right),$$

la relation

$$D_k F(\varphi)=-\frac{1}{k}F(\varphi)+\frac{1}{kk'^2}E(\varphi)-\frac{k}{k'^2}\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta\varphi}.$$

On a ensuite, de la même manière,

$$D_k E(\varphi)=-\frac{1}{k}F(\varphi)+\frac{1}{k}E(\varphi).$$

Faisant, dans ces deux dernières équations, $\varphi=\frac{\pi}{2}$, on a les deux relations

$$(12) \qquad D_k K=-\frac{K}{k}+\frac{E}{kk'^2}, \quad D_k E=-\frac{K}{k}+\frac{E}{k}.$$

Les quantités k, k' étant liées par l'équation

$$k^2+k'^2=1,$$

il en résulte

$$dk'=-\frac{k}{k'}dk,$$

et par suite, f désignant une fonction quelconque,

$$D_k f(k')=-\frac{k}{k'}D_{k'}f(k').$$

D'après cela, si dans les formules (12) on change k en k', on

aura les valeurs de $D_{k'}K'$, $D_{k'}E'$, et par conséquent celles de

$$(13)\qquad D_k K' = \frac{kK'}{k'^2} - \frac{E'}{kk'^2}, \quad D_k E' = \frac{kK'}{k'^2} - \frac{kE'}{k'^2}.$$

Si, au moyen des valeurs (1) et (2), on forme la dérivée de l'expression

$$(14)\qquad H = KE' + K'E - KK',$$

on trouvera que cette dérivée s'annule identiquement. Donc la quantité H est indépendante de k, et sa valeur est une constante, qu'il est facile de déterminer. Si l'on remplace, dans le second membre de (3), K, K', E, E' par leurs valeurs

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\chi}{\Delta'\chi}, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Delta\varphi\, d\varphi, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Delta'\chi\, d\chi,$$

où $\Delta'\chi = \sqrt{1 - k'^2 \sin^2\chi}$, on aura [483]

$$H = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\, d\chi \left(\frac{\Delta'\chi}{\Delta\varphi} + \frac{\Delta\varphi}{\Delta'\chi} - \frac{1}{\Delta\varphi\,\Delta'\chi} \right)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\, d\chi \, \frac{1 - k^2 \sin^2\varphi - k'^2 \sin^2\chi}{\Delta\varphi\,\Delta'\chi}.$$

Cette valeur devient, pour $k = 0$, $k' = 1$,

$$H = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\chi\, d\varphi\, d\chi = \frac{\pi}{2}.$$

On a donc, entre les quatre intégrales complètes K, K', E, E', la relation

$$(15)\qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\pi}{2} = KE' + K'E - KK' \\ \text{ou} \\ \dfrac{E}{K} + \dfrac{E'}{K'} = 1 + \dfrac{\pi}{2KK'}. \end{array} \right.$$

1382. *Calcul numérique des intégrales elliptiques de seconde espèce.* — On pourrait appliquer au calcul de ces intégrales la méthode des transformations modulaires dont nous avons fait usage pour calculer les intégrales de première espèce. On trouvera les détails de cette application dans les Traités de Gudermann et de Schellbach. Nous nous contenterons ici de rappeler les procédés que nous avons indiqués dans ce qui précède, et qui sont suffisants dans la pratique.

On commencera par calculer, par un des procédés exposés plus haut, les valeurs des intégrales K, K′, u et des constantes q, q'. On déterminera ensuite la valeur de l'une des intégrales complètes E, E′, en prenant de préférence celle qui répond au plus petit des modules k, k', et se servant de la série indiquée à la fin du n° 455. En posant ainsi, dans le cas où $k < k'$,

$$k = \sin\theta, \quad h = \tang\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-k'}{1+k'}},$$

on aura

$$(1 - k^2\sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}} = \cos^2\frac{\theta}{2}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)_1 h^2 e^{2i\varphi} + \ldots\right]\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)_1 h^2 e^{-2i\varphi} + \ldots\right],$$

d'où, en ne conservant que le terme constant,

$$A_0 = \cos^2\frac{\theta}{2}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)_1^2 h^4 + \left(\frac{1}{2}\right)_2^2 h^8 + \ldots\right],$$

et, en intégrant de 0 à $\frac{\pi}{2}$, il viendra

$$E = \frac{\pi}{2} A_0.$$

Puisqu'on peut toujours supposer $\theta < \frac{\pi}{4}$, la quantité $\tang^4\frac{\theta}{2}$, par rapport à laquelle la série est ordonnée, sera, dans ce cas, $< \frac{1}{33}$, et par suite la série sera très-convergente.

Si la série qui donne la plus grande des intégrales E, E′ est trop peu convergente, on pourra alors tirer cette intégrale de la formule de Legendre, établie au numéro précédent.

On pourrait calculer de la même manière l'intégrale d'amplitude

quelconque $E(\varphi)$, dont le développement serait semblable à celui que nous avons donné pour $F(\varphi)$ au n° 455, et où entrent directement l'amplitude et le module donnés.

Mais, lorsqu'on a déjà obtenu u et K ou q, il est plus simple de calculer E et $E(\varphi) = \operatorname{el} u$ par les formules du n° 1380,

$$\frac{E}{K} = \left(\frac{\pi}{2K}\right)^2 \left(1 + 2\sum_1^\infty \frac{1}{\operatorname{Ch}^2 2n\rho}\right),$$

$$\operatorname{el} u = \frac{E}{K} u + \frac{\pi}{2K} D_x \log \vartheta(x),$$

auxquelles on peut toujours donner une forme très-convergente.

Exemple. — Si l'on prend, comme au n° 1373,

$$\varphi = 0^q,9, \quad \operatorname{arc} \sin k = 0^q,8,$$

les formules précédentes donneront

$$\log \frac{E}{K} = \bar{1},62688, \quad E = 1,1011,$$

puis

$$\frac{E}{K} u = 0,89340, \quad \eta \frac{D_x \vartheta(x)}{\vartheta(x)} = 0,15736,$$

d'où

$$\operatorname{el} u = 1,05076.$$

§ IX.

DES INTÉGRALES ELLIPTIQUES DE TROISIÈME ESPÈCE.

1383. Nous avons vu [1308] que la forme générale des intégrales de troisième espèce peut se ramener à celle-ci,

$$\Pi(\varphi, n) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1 + n\sin^2\varphi)\Delta\varphi}$$

ou, en posant $\varphi = \operatorname{am} u$,

$$\Pi(\operatorname{am} u, n) = \int_0^u \frac{du}{1 + n\operatorname{sn}^2 u},$$

le module étant toujours représenté par la lettre k, à moins d'indication contraire.

Si l'on fait $\sin\varphi = \operatorname{sn} u = z$, l'intégrale deviendra alors

$$\Pi(\arcsin z, n) = \int_0^z \frac{dz}{(1+nz^2)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},$$

et sous cette forme on voit que la fonction sous le signe $\int$ a trois couples de points critiques, savoir les points $\pm 1, \pm \frac{1}{k}$, qui lui sont communs avec les fonctions correspondantes aux intégrales de première et de seconde espèce, et qui, tous les quatre, sont à la fois des infinis et des points de ramification de cette fonction, et les deux points $\pm\sqrt{-\frac{1}{n}}$, qui sont simplement des infinis.

En considérant les intégrales prises le long des contours élémentaires qui entourent ces six points, on trouvera d'abord, pour les quatre premiers, des résultats semblables à ceux que nous avons rencontrés dans l'étude des intégrales de première espèce, ce qui donnera, pour l'intégrale, deux périodes, correspondant l'une aux contours (± 1), l'autre aux contours $\left(\pm\frac{1}{k}\right)$. Les deux autres points critiques $\pm\sqrt{-\frac{1}{n}}$ jouiront des mêmes propriétés que ceux de l'intégrale $\int\frac{dz}{1+nz^2}$ [1257].

Nous engageons le lecteur à reprendre sur l'intégrale Π tous les calculs que nous avons développés dans le Chapitre précédent, en traitant des intégrales

$$\int\frac{dz}{1+nz^2}, \quad \int\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}, \quad \int\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}.$$

On voit ainsi que l'intégrale Π a trois périodes. On pourrait, d'après cela, être entraîné par l'analogie à en conclure l'existence d'une fonction triplement périodique, inverse de cette intégrale. Mais Jacobi a fait voir (¹) qu'on ne peut introduire dans l'Analyse

(¹) *De functionibus duarum variabilium quadrupliciter periodicis* (*Journal de Crelle*, t. XIII).

des fonctions périodiques d'une seule variable à plus de deux périodes, et nous renverrons, pour ces recherches, au Mémoire de Jacobi et à celui de Rosenhain ([1]).

1384. Les propriétés de l'intégrale Π dépendent principalement de la situation relative des trois couples de points critiques ± 1, $\pm \frac{1}{k}$, $\pm \sqrt{-\frac{1}{n}}$. Nous avons déjà vu que l'on peut toujours ramener l'intégrale au cas où la constante k est réelle et numériquement moindre que l'unité. Nous verrons bientôt aussi [1392] que le cas de n complexe peut toujours se réduire à celui de n réel.

Cela posé, en ne considérant qu'un seul point de chaque couple, on verra que, suivant que l'on se trouvera dans l'un ou l'autre de quatre cas,

(1) $$-\infty < n < -1,$$

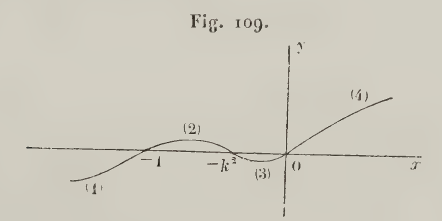
(2) $$-1 < n < -k^2,$$

(3) $$-k^2 < n < 0,$$

(4) $$0 < n < +\infty,$$

représentés par la *fig.* 109, le point critique $\frac{1}{\sqrt{-n}}$ occupera, par

Fig. 109.



rapport aux deux autres, les positions correspondantes indiquées par la *fig.* 110.

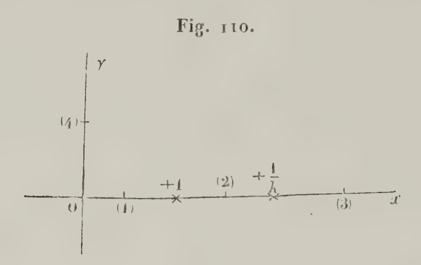
Quand le point $\frac{1}{\sqrt{-n}}$ coïncide avec un des deux autres, nous

---

([1]) *Sur les fonctions de deux variables et à quatre périodes* (*Mémoires de l'Institut de France, Savants étrangers*, t. XI, p. 376; 1851).

avons vu [1306] que l'intégrale Π se ramène aux intégrales des

Fig. 110.



deux premières espèces, en vertu des formules

$$k'^2 \int \frac{du}{\operatorname{cn}^2 u} = k'^2 u - \operatorname{el} u + \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u}{\operatorname{cn} u},$$

$$k'^2 \int \frac{du}{\operatorname{dn}^2 u} = \operatorname{el} u - k^2 \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u}.$$

Pour $n = 0$, $\Pi = u$.

Pour $n = \infty$, $n\Pi$ a pour limite [1306, 2°]

$$\int \frac{du}{\operatorname{sn}^2 u} = u - \operatorname{el} u - \frac{\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{\operatorname{sn} u}.$$

1385. Si n parcourt l'axe des x, de $-\infty$ à $+\infty$, alors, dans le passage de l'une à l'autre des régions indiquées par les nos (1), (2), (3), (4) sur la *fig.* 109, le produit

$$N = n(n+1)(n+k^2),$$

que l'on pourrait appeler le *nombre caractéristique* de l'intégrale Π, changera chaque fois de signe. Nous verrons que du signe de N dépendent les propriétés fondamentales de l'intégrale.

D'après cela, nous diviserons les intégrales elliptiques de troisième espèce et de paramètre réel en deux classes : la première, correspondante aux valeurs négatives de N, et par suite aux cas où le paramètre n satisfait à l'un des deux systèmes d'inégalités

$$(1) \qquad -\infty < n < -1,$$

$$(3) \qquad -k^2 < n < 0,$$

sera dite la classe des *intégrales à paramètre logarithmique;* la

seconde, pour laquelle on a $N > 0$ et l'un des systèmes d'inégalités

(2) $$-1 < n < -k^2,$$

(4) $$0 < n < +\infty,$$

sera dite la classe des *intégrales à paramètre circulaire*. Nous donnerons bientôt la raison de ces dénominations [1390].

Si l'on désigne par a un argument réel, que l'on pourra toujours supposer compris entre $-2K$ et $+2K$ ou entre $-2K'$ et $+2K'$, les nombres compris respectivement dans les quatre intervalles (1), (2), (3), (4) de la *fig.* 109 pourront être représentés par les expressions

$$-\frac{1}{\operatorname{snc}^2 a}, \quad -\operatorname{dn}'^2 a, \quad -k^2 \operatorname{sn}^2 a, \quad k'^2 \operatorname{tn}'^2 a.$$

Donc la première classe comprendra les intégrales des deux formes

$$\int_0^u \frac{du}{1 - \dfrac{\operatorname{sn}^2 u}{\operatorname{snc}^2 a}}, \quad \int_0^u \frac{du}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u},$$

et la seconde classe les intégrales des deux formes

$$\int_0^u \frac{du}{1 - \operatorname{dn}'^2 a \operatorname{sn}^2 u}, \quad \int_0^u \frac{du}{1 + k'^2 \operatorname{tn}'^2 a \operatorname{sn}^2 u}.$$

1386. Outre les intégrales de la forme

$$\Pi = \int_0^u \frac{du}{1 + n \operatorname{sn}^2 u},$$

la troisième espèce d'intégrales elliptiques comprend encore d'autres intégrales, liées aux premières par des relations simples, savoir les intégrales

$$\int_0^u \frac{\operatorname{sn}^2 u \, du}{1 + n \operatorname{sn}^2 u} = \frac{1}{n}(u - \Pi),$$

$$\int_0^u \frac{\operatorname{cn}^2 u \, du}{1 + n \operatorname{sn}^2 u} = -\frac{u}{n} + \left(1 + \frac{1}{n}\right)\Pi,$$

$$\int_0^u \frac{\operatorname{dn}^2 u \, du}{1 + n \operatorname{sn}^2 u} = -\frac{k^2 u}{n} + \left(1 + \frac{k^2}{n}\right)\Pi,$$

dont chacune se partage en deux classes de la même manière que Π.

1387. Les périodes des intégrales de troisième espèce qui répondent aux points critiques ± 1, $\pm \frac{1}{k}$ sont, comme pour les intégrales de première et de seconde espèce, des multiples des intégrales complètes

$$\int_0^K \frac{du}{1 + n\,\mathrm{sn}^2 u}, \quad i\int_0^{K'} \frac{du}{1 + n\,\mathrm{sn}^2 u}.$$

Les périodes relatives aux points $\pm \frac{1}{\sqrt{-n}}$ auront pour valeur, au signe près, la valeur, pour $z = \frac{1}{\sqrt{-n}}$, de l'expression

$$2\pi i \lim\left(z - \frac{1}{\sqrt{-n}}\right)\frac{1}{(1+nz^2)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = \frac{\pi n}{\sqrt{N}},$$

N désignant le même produit qu'au n° 1385. Cette période est donc imaginaire pour les intégrales de la première classe, réelle pour celles de la seconde.

1388. Si l'on change u en iu, on a

$$\int_0^u \frac{d(iu)}{1 + n\,\mathrm{sn}^2 iu} = i\int_0^u \frac{du}{1 - n\,\mathrm{tn}'^2 u} = i\int_0^u \frac{\mathrm{cn}'^2 u\,du}{1 - (n+1)\,\mathrm{sn}'^2 u}$$
$$= \frac{i}{n+1}\left[u + n\int_0^u \frac{du}{1-(n+1)\,\mathrm{sn}'^2 u}\right],$$

c'est-à-dire

$$\Pi(\mathrm{am}\,iu, n, k) = \frac{iu}{n+1} + \frac{in}{n+1}\Pi(\mathrm{am}'\,u, -n-1, k').$$

L'intégrale se change donc en une autre, de module complémentaire et de paramètre $-n-1$.

Le nombre caractéristique de la nouvelle intégrale, de module k', étant égal à

$$-n(n+1)(n+k'^2),$$

cette intégrale n'appartiendra pas à la même classe que la première $\Pi(\operatorname{am} u, n, k)$.

1389. *Théorème d'addition pour les intégrales elliptiques de troisième espèce.* — Soient $\Pi(\varphi, n)$, $\Pi(\chi, n)$ deux intégrales de même module et de même paramètre, et posons

$$\Pi(\varphi, n) + \Pi(\chi, n) = \mathrm{U}, \tag{1}$$

d'où

$$d\mathrm{U} = \frac{d\varphi}{(1 + n\sin^2\varphi)\,\Delta\varphi} + \frac{d\chi}{(1 + n\sin^2\chi)\,\Delta\chi}.$$

Si la somme des intégrales de première espèce d'amplitudes φ, χ doit être constante, on a alors

$$\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} + \frac{d\chi}{\Delta\chi} = 0, \tag{2}$$

d'où, en éliminant $d\chi$,

$$d\mathrm{U} = \frac{n(\sin^2\chi - \sin^2\varphi)}{1 + n(\sin^2\varphi + \sin^2\chi) + n^2\sin^2\varphi\sin^2\chi}\,\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}.$$

Or nous avons trouvé [1381], pour les intégrales de seconde espèce, la formule d'addition

$$\mathrm{E}(\varphi) + \mathrm{E}(\chi) - \mathrm{E}(\sigma) = k^2\sin\sigma\sin\varphi\sin\chi,$$

d'ou l'on tire, σ étant constant,

$$\Delta\varphi\,d\varphi + \Delta\chi\,d\chi = k^2\sin\sigma . d(\sin\varphi\sin\chi),$$

ou, en éliminant encore $d\chi$ au moyen de l'équation (2),

$$-k^2\sin\sigma . d(\sin\varphi\sin\chi) = \frac{\Delta^2\varphi - \Delta^2\chi}{\Delta\varphi}\,d\varphi = k^2(\sin^2\chi - \sin^2\varphi)\,\frac{d\varphi}{\Delta\varphi},$$

et, par suite,

$$d\mathrm{U} = \frac{n\sin\sigma . d(\sin\varphi\sin\chi)}{1 + n(\sin^2\varphi + \sin^2\chi) + n^2\sin^2\varphi\sin^2\chi}.$$

On a d'ailleurs, par la formule d'addition des intégrales de première espèce [827, V],

$$(\cos\sigma + \sin\varphi\sin\chi\,\Delta\sigma)^2 = \cos^2\varphi\cos^2\chi = 1 - (\sin^2\varphi + \sin^2\chi) + \sin^2\varphi\sin^2\chi,$$

d'où, en éliminant $\sin^2\varphi + \sin^2\chi$, et posant, pour abréger,

$$\sin\varphi \sin\chi = t,$$

on tire

$$dU = \frac{n \sin\sigma\, dt}{1 + n\sin\sigma - 2n\cos\sigma\,\Delta\sigma.t + n(n + k^2\sin^2\sigma)t^2}.$$

On a, par conséquent,

$$\Pi(\varphi, n) + \Pi(\chi, n) = \int dU + \text{const.}$$

Si l'on suppose maintenant $\varphi = 0$, il en résultera

$$\Pi(\varphi, n) = 0, \quad \chi = \sigma, \quad t = 0.$$

Donc, en intégrant à partir de $\varphi = 0$ ou de $t = 0$, la constante d'intégration sera égale à $\Pi(\sigma, n)$. Donc

(3) $$\Pi(\varphi, n) + \Pi(\chi, n) - \Pi(\sigma, n) = \int_0^t dU,$$

ou

$$\Pi(\operatorname{am} u, n) + \Pi(\operatorname{am} v, n) - \Pi[\operatorname{am}(u+v), n] = \int_0^{\operatorname{sn} u \operatorname{sn} v} dU.$$

1390. La nature de cette intégrale dépend de celle des racines du dénominateur de dU, c'est-à-dire du signe de l'expression

$$(n\cos\sigma\Delta\sigma)^2 - (1 + n\sin\sigma)n(n + k^2\sin^2\sigma)$$
$$= -\sin^2\sigma . n(n+1)(n+k^2) = -N\sin^2\sigma.$$

Le dénominateur de U sera donc décomposable en facteurs réels ou en facteurs complexes suivant que N sera négatif ou positif, c'est-à-dire suivant que le paramètre n appartiendra à la première classe ou à la seconde.

Donc, si les intégrales $\Pi(\varphi, n)$, $\Pi(\chi, n)$ sont de la première classe, le second membre de la formule d'addition (3) s'exprimera sous forme réelle au moyen de la fonction Arg Th, ou, ce qui revient au même, au moyen des logarithmes. Si les intégrales sont de la seconde classe, le second membre s'exprimera par un arc tangente. De là les noms de *paramètre logarithmique* ou de *paramètre circulaire,* attribués respectivement, dans ces deux cas, à la constante n.

On trouve, en effectuant les calculs, pour la première classe,

$$U = \frac{1}{\sqrt{-N}} \operatorname{Arg\,Th} \frac{\sqrt{-N}.\sin\varphi\sin\chi\sin\sigma}{\frac{1}{n} + \sin^2\sigma + \sin\varphi\sin\chi\cos\sigma\,\Delta\sigma},$$

et pour la seconde classe,

$$U = \frac{1}{\sqrt{N}} \operatorname{arc\,tang} \frac{\sqrt{N}.\sin\varphi\sin\chi\sin\sigma}{\frac{1}{n} + \sin^2\sigma + \sin\varphi\sin\chi\cos\sigma\,\Delta\sigma}.$$

1391. *Relation entre des intégrales de troisième espèce de même amplitude et de paramètres différents.* — Si l'on différentie l'expression

$$w = \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{(1 + g\sin^2\varphi)\Delta\varphi},$$

ce qui donnera

$$dw = \frac{1 - (2+g)\sin^2\varphi + (1+2g)k^2\sin^4\varphi - gk^2\sin^6\varphi}{(1+g\sin^2\varphi)^2\Delta^2\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{\Delta\varphi},$$

on en tirera, h étant, comme g, une constante indéterminée,

$$(1)\quad \int_0^w \frac{dw}{1+hw^2} = \int_0^\varphi \frac{1-(2+g)\sin^2\varphi + (1+2g)k^2\sin^2\varphi - gk^2\sin^6\varphi}{(1+g\sin^2\varphi)^2\Delta^2\varphi + h\sin^2\varphi\cos^2\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}.$$

Les deux termes de la fraction qui multiplie $\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}$, dans le second membre, sont deux polynômes du troisième degré chacun par rapport à $\sin^2\varphi$. En remarquant que la fraction se réduirait à $\frac{1}{g}$ pour $\sin^2\varphi = \infty$, on en conclut que cette fraction peut se décomposer en fractions simples, sous la forme

$$(2)\qquad \frac{1}{g} + \frac{A}{1+n\sin^2\varphi} + \frac{A'}{1+n'\sin^2\varphi} + \frac{A''}{1+n''\sin^2\varphi},$$

et l'équation (1) devient

$$(3)\quad \int_0^w \frac{dw}{1+hw^2} = \frac{1}{g}F(\varphi) + A\Pi(\varphi, n) + A'\Pi(\varphi, n') + A''\Pi(\varphi, n'').$$

Cette équation contient les huit constantes

$$g,\ h,\ n,\ n',\ n'',\ \mathrm{A},\ \mathrm{A}',\ \mathrm{A}'',$$

liées entre elles par six relations, savoir, les trois relations obtenues en identifiant le polynôme

$$(1 + g\sin^2\varphi)^2\Delta^2\varphi + h\sin^2\varphi\cos^2\varphi$$

avec le produit

$$(1 + n\sin^2\varphi)(1 + n'\sin^2\varphi)(1 + n''\sin^2\varphi),$$

et les trois autres qui déterminent les coefficients A, A′, A″. On peut donc se donner à volonté deux de ces constantes et déterminer par leur moyen les six autres.

Supposons que l'on ait choisi d'avance les deux paramètres n, n', et que ces paramètres aient ou des valeurs réelles ou des valeurs complexes conjuguées, de sorte que leur somme et leur produit soient des quantités réelles. On trouvera alors, pour les autres constantes g, h, n'', des valeurs réelles, par la résolution des équations

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} 2g + h - k^2 &= n + n' + n'', \\ g^2 - 2gk^2 - h &= nn' + (n + n')n'', \\ -g^2k^2 &= nn'n''. \end{aligned}\right.$$

En ajoutant ces équations après les avoir multipliées 1° par 1, 1, 1, 2° par k^4, k^2, 1, on en tire

$$(5)\qquad (g + 1)^2 k'^2 = (n + 1)(n' + 1)(n'' + 1),$$

$$(6)\qquad -hk^2k'^2 = (n + k^2)(n' + k^2)(n'' + k^2).$$

Si l'on déduit de la dernière équation (4) la valeur de

$$(7)\qquad n'' = -\frac{g^2k^2}{nn'},$$

et qu'on la substitue dans (5), l'équation deviendra

$$(8)\qquad g^2[nn' + k^2(n + n' + 1)] + 2gk'^2nn' = nn'(nn' + n + n' + k^2).$$

On voit aisément que les valeurs de g fournies par cette équation sont réelles quand n et n' sont deux quantités complexes conju-

guées. On trouve, en effet, pour la quantité sous le radical dans l'expression de g,

$$\begin{aligned}&k'^4 n^2 n'^2 + nn'[nn' + n + n' + k^2][nn' + k^2(n + n' + 1)]\\&\quad = nn'(n+1)(n'+1)(n+k^2)(n'+k^2) = \mathrm{NN}',\end{aligned}$$

N et N′ étant les nombres caractéristiques [1385] des deux paramètres n, n', et ce produit est positif, si les deux nombres nn' et $nn' - \left(\frac{n+n'}{2}\right)^2$ sont positifs.

Connaissant g, on aura n'' par l'équation (7) et h par l'équation

$$(9)\qquad h = -\frac{1}{k^2 k'^2}(n+k^2)(n'+k^2)(n''+k^2).$$

On a ensuite

$$\mathrm{A} = \frac{n^3 + (2+g)n^2 + (1+2g)(n+gk^2)}{n(n-n')(n-n'')},$$

d'où l'on déduit les valeurs de A′ et de A″ par des permutations d'accents.

1392. Dans le cas où n et n' sont deux quantités complexes conjuguées, les valeurs de g, h, n'' étant réelles, on voit que l'équation (3) donne pour la somme

$$\mathrm{A}\Pi(\varphi, n) + \mathrm{A}'\Pi(\varphi, n')$$

une valeur réelle

$$\int_0^w \frac{dw}{1+hw^2} - \frac{1}{g}\mathrm{F}(\varphi) - \mathrm{A}''\Pi(\varphi, n''),$$

dans laquelle entre une intégrale de troisième espèce à paramètre réel. En substituant successivement, pour g, h, n'', A, A′, A″, les deux systèmes de valeurs de ces quantités qui correspondent aux deux racines de l'équation (8), on aura deux équations de la forme

$$(10)\qquad \begin{cases}\mathrm{A}_1\Pi(\varphi, n) + \mathrm{A}'_1\Pi(\varphi, n') = \Omega_1,\\ \mathrm{A}_2\Pi(\varphi, n) + \mathrm{A}'_2\Pi(\varphi, n') = \Omega_2,\end{cases}$$

d'où l'on tirera pour $\Pi(\varphi, n)$ et $\Pi(\varphi, n')$ des valeurs exprimées au moyen de deux intégrales à paramètres réels $\Pi(\varphi, n''_1)$, $\Pi(\varphi, n''_2)$. On peut donc, dans tous les cas, ramener une intégrale à paramètre

complexe à des intégrales à paramètre réel, ainsi que nous l'avions annoncé [1384].

Dans le cas particulier où l'on a

$$nn' + n + n' + k^2 = 0,$$

l'une des racines g_2 de l'équation (8) est nulle, et il vient

$$n''_2 = 0, \quad h_2 = -nn'.$$

Si l'on fait

$$n = \mu e^{i\nu}, \quad n' = \mu e^{-i\nu},$$

on trouvera, en reprenant directement les calculs, à partir de l'équation (1), dans l'hypothèse de $g = 0$,

$$\left.\begin{matrix} A \\ A' \end{matrix}\right\} = \frac{\mu^2 + k^2 + (2k^2\cos\nu - \mu)e^{\mp i\nu}}{\mu^2(1 - e^{\pm 2i\nu})},$$

et la seconde équation (10) sera remplacée par l'équation

$$(11) \quad A_2\Pi(\varphi, n) + A'_2\Pi(\varphi, n') = -\frac{k^2}{\mu^2}F(\varphi) + \frac{1}{\mu}\operatorname{ArgTh}\frac{\mu\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta\varphi}.$$

1393. Nous avons établi [1350] la relation identique

$$\frac{\vartheta_1(\alpha + x)\vartheta_1(\alpha - x)}{[\vartheta_1(\alpha)]^2[\vartheta(x)]^2} = 1 - \frac{\operatorname{sn}^2 u}{\operatorname{sn}^2 a}.$$

On en tire, en la différentiant logarithmiquement,

$$D_x \log\vartheta_1(\alpha + x) - D_x\log\vartheta_1(\alpha - x) - 2D_x\log\vartheta(x) = \frac{D_x \operatorname{sn}^2 u}{\operatorname{sn}^2 u - \operatorname{sn}^2 a},$$

d'où, en permutant entre eux a et u, et remarquant que la fonction ϑ_1 est impaire,

$$D_\alpha \log\vartheta_1(x + \alpha) + D_\alpha\log\vartheta_1(x - \alpha) - 2D_\alpha\log\vartheta(\alpha) = \frac{D_\alpha \operatorname{sn}^2 a}{\operatorname{sn}^2 a - \operatorname{sn}^2 u};$$

par suite, à cause des égalités

$$D_\alpha\log\vartheta_1(x+\alpha) = D_x\log\vartheta_1(x-\alpha), \quad D_\alpha\log\vartheta_1(x-\alpha) = -D_x\log\vartheta_1(x-\alpha),$$

on a

$$D_x \log\vartheta_1(x + \alpha) - D_x\log\vartheta_1(x - \alpha) - 2D_\alpha\log\vartheta(\alpha) = \frac{D_\alpha \operatorname{sn}^2 a}{\operatorname{sn}^2 u - \operatorname{sn}^2 a}.$$

On tire de là, en intégrant par rapport à x,

$$(1)\quad \frac{\operatorname{dn} a}{\operatorname{tn} a}\int_0^u \frac{du}{1-\dfrac{\operatorname{sn}^2 u}{\operatorname{sn}^2 a}} = -x.\mathrm{D}_\alpha \log \vartheta(\alpha) + \frac{1}{2}\log\frac{\vartheta_1(x+\alpha)}{\vartheta_1(x-\alpha)},$$

expression des intégrales dont le paramètre est logarithmique et compris entre -1 et $-\infty$, en fonction des quantités $\log\vartheta_\mu$ et de leurs dérivées.

1394. Nous avons encore démontré [1350] la formule

$$\frac{\vartheta(x+\alpha)\,\vartheta(x-\alpha)}{[\vartheta(\alpha)]^2\,[\vartheta(x)]^2} = 1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u,$$

d'où l'on tire, en raisonnant comme au numéro précédent,

$$(2)\quad k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a \int_0^u \frac{\operatorname{sn}^2 u\, du}{1-k^2\operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u} = x.\mathrm{D}_\alpha \log\vartheta(\alpha) - \frac{1}{2}\log\frac{\vartheta(x+\alpha)}{\vartheta(x-\alpha)}.$$

Le premier membre de cette équation est l'intégrale que Jacobi a choisie comme type des intégrales de troisième espèce et qu'il a désignée par $\Pi(u, a)$. Pour éviter toute confusion avec la notation de Legendre, dont nous nous sommes servi jusqu'ici, nous désignerons, avec Gudermann, l'intégrale (2) par le symbole

$$(3)\quad \mathfrak{S}(u, a) = k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a \int_0^u \frac{\operatorname{sn}^2 u\, du}{1-k^2\operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u}.$$

Suivant le langage adopté par Jacobi, la constante a est dite le *paramètre* de l'intégrale, tandis que, d'après la terminologie de Legendre, le *paramètre* est $-k^2\operatorname{sn}^2 a$.

En comparant l'expression précédente avec l'intégrale correspondante de Legendre, on aurait

$$(4)\quad \mathfrak{S}(u, a) = \frac{\operatorname{dn} a}{\operatorname{tn} a}[-u + \Pi(\operatorname{am} u, -k^2\operatorname{sn}^2 a)],$$

$$(5)\quad \Pi(\varphi, n) = \mathrm{F}(\varphi) + \frac{n}{\sqrt{-\mathrm{N}}}\,\mathfrak{S}\left[\mathrm{F}(\varphi),\ \mathrm{F}\left(\arcsin\frac{\sqrt{-n}}{k}\right)\right].$$

La formule (2) donne le développement en série des intégrales de troisième espèce à paramètre logarithmique compris entre $-k^2$

et o, comme la formule (1) donne le développement des intégrales dont le paramètre est compris entre $-\infty$ et -1.

Si l'on a égard à la formule (11) du n° 1380, la valeur (2) de $\mathfrak{S}(u, a)$ pourra encore s'écrire sous la forme

$$(6) \qquad \mathfrak{S}(u, a) = u\left(\mathrm{el}\,a - \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{K}}\,a\right) - \frac{1}{2}\log\frac{\vartheta(x+\alpha)}{\vartheta(x-\alpha)}.$$

1395. Il est maintenant facile de passer au développement des intégrales à paramètre circulaire, les différentes formes d'intégrales de troisième espèce pouvant se déduire les unes des autres par les substitutions qui transforment les unes dans les autres les quantités

$$-\frac{1}{\mathrm{snc}^2 a}, \quad -\mathrm{dn}'^2 a, \quad -k^2\,\mathrm{sn}^2 a, \quad k'^2\,\mathrm{tn}'^2 a,$$

que nous avons indiquées [1385] comme représentant le paramètre n dans les quatre cas qui peuvent se produire.

Si l'on remplace a par $a + \mathrm{K} + i\mathrm{K}'$, $k\,\mathrm{sn}\,a$ se change en $\frac{1}{\mathrm{snc}\,a}$, et l'intégrale (3), relative au troisième intervalle [1384], se change dans l'intégrale relative au premier, c'est-à-dire dans l'autre type (1) d'intégrales à paramètre logarithmique :

$$(7) \quad \mathfrak{S}^{(1)}(u, a) = \frac{\mathrm{dnc}\,a}{\mathrm{tnc}\,a}\int_0^u \frac{\mathrm{sn}^2 u\,du}{\mathrm{snc}^2 a - \mathrm{sn}^2 u} = x.\mathrm{D}_\alpha \log\vartheta_2(\alpha) - \frac{1}{2}\log\frac{\vartheta_2(x+\alpha)}{\vartheta_2(x-\alpha)}.$$

Si l'on change actuellement, dans les formules (2) et (7), a en ia, on aura les formules qui représenteront les deux sortes d'intégrales à paramètre circulaire :

$$(8) \quad \begin{cases} \mathrm{S}(u, a) = \dfrac{k^2\,\mathrm{dn}'\,a\,\mathrm{tn}'\,a}{\mathrm{cn}'^2 a}\displaystyle\int_0^u \frac{\mathrm{sn}^2 u\,du}{1 + k'^2\,\mathrm{tn}'^2 a\,\mathrm{sn}^2 u} \\ \qquad = -\,x.\mathrm{D}_\alpha\vartheta(i\alpha) + \dfrac{1}{2i}\log\dfrac{\vartheta(x+i\alpha)}{\vartheta(x-i\alpha)}, \end{cases}$$

$$(9) \quad \begin{cases} \mathrm{S}^{(1)}(u, a) = k'^2\,\mathrm{sn}'\,a\,\mathrm{cn}'\,a\,\mathrm{dn}'\,a\displaystyle\int_0^u \frac{\mathrm{sn}^2 u\,du}{1 - \mathrm{dn}'^2 a\,\mathrm{sn}^2 u} \\ \qquad = -\,x.\mathrm{D}_\alpha\log\vartheta_2(i\alpha) - \dfrac{1}{2i}\log\dfrac{\vartheta_2(x+i\alpha)}{\vartheta_2(x-i\alpha)}. \end{cases}$$

1396. On pourrait traiter de la même manière les intégrales des trois autres formes

$$\int \frac{du}{1 + n\,\mathrm{sn}^2 u}, \quad \int \frac{\mathrm{cn}^2 u\, du}{1 + n\,\mathrm{sn}^2 u}, \quad \int \frac{\mathrm{dn}^2 u\, du}{1 + n\,\mathrm{sn}^2 u}.$$

On partirait du cas où le paramètre est représenté par $-k^2 \mathrm{sn}^2 a$, et, en multipliant ces intégrales respectivement par les facteurs

$$\frac{\mathrm{dn}\, a}{\mathrm{tn}\, a}, \quad \frac{k^2\, \mathrm{sn}\, a\, \mathrm{cn}\, a}{\mathrm{dn}\, a}, \quad \mathrm{dn}\, a\, \mathrm{tn}\, a,$$

on obtiendrait pour chacune quatre formules, dont les seconds membres contiendraient le même second terme $\frac{1}{2} \log \frac{\vartheta(x+\alpha)}{\vartheta(x-\alpha)}$, ou ceux qui s'en déduisent, et des premiers termes semblables, au changement près de l'indice du ϑ.

1397. Les seconds membres des formules obtenues de cette manière admettent, comme nous l'avons vu dans le § V de ce Chapitre, des développements rapidement convergents pour toutes les valeurs du module.

On peut, dans le cas des formules (7), (8), (9), augmenter encore la convergence, lorsque l'argument a du paramètre est plus grand que $\frac{K}{2}$ ou $\frac{K'}{2}$, en introduisant, au lieu de cet argument, son complément $K - a$ ou $K' - a$.

On a encore, entre les intégrales (3), (7), (8), (9), les relations

$$\mathfrak{S}(u, ia) = i\,\mathrm{S}(u, a),$$

$$\mathfrak{S}(iu, a) = \frac{1}{i}\,\mathrm{S}(u, a + iK'),$$

$$\mathfrak{S}(iu, ia) = \mathfrak{S}^{(1)}(u, a, k').$$

1398. Donnons encore quelques formules relatives à la forme (3) de l'intégrale de troisième espèce, en laissant au lecteur le soin de les étendre aux autres formes.

Si l'on échange entre elles les lettres u et a dans la formule (6), on trouve, à cause de $\vartheta(\alpha - x) = \vartheta(x - \alpha)$,

$$\mathfrak{S}(a, u) = a\left(\mathrm{el}\, u - \frac{E}{K}\, u\right) - \frac{1}{2} \log \frac{\vartheta(x+\alpha)}{\vartheta(x-\alpha)}.$$

En faisant la différence des deux équations, on obtient la relation

$$(10) \qquad \mathfrak{S}(u, a) - u \,\mathrm{el}\, a = \mathfrak{S}(a, u) - a \,\mathrm{el}\, u.$$

La fonction $\mathfrak{S}(u, a) - u \,\mathrm{el}\, a$ n'est donc pas altérée par l'échange des deux arguments u, a.

Si l'on fait, dans l'équation (10), $a = \mathrm{K}$, $\mathfrak{S}(a, \mathrm{K})$ étant nul, il vient

$$(11) \qquad \mathfrak{S}(\mathrm{K}, a) = \mathrm{K} \,\mathrm{el}\, a - a\mathrm{E}.$$

Donc l'*intégrale complète* de troisième espèce s'exprime au moyen des intégrales des deux premières espèces.

§ X.

TABLES DE FONCTIONS ELLIPTIQUES.

1399. Pour compléter ce que nous avons dit au § VII de ce Chapitre, touchant le calcul numérique des intégrales et des fonctions elliptiques, nous ajouterons ici quelques Tables abrégées, pouvant servir à éclairer la discussion des formules qui dépendent de ces transcendantes, et même à obtenir une première approximation des résultats.

La première de ces Tables donne avec quatre décimales les valeurs des fonctions du module, c'est-à-dire des intégrales complètes de première et de seconde espèce et de la quantité q, pour les valeurs de l'angle θ du module, de centième en centième du quadrant.

Dans les cas où le module est très-voisin de zéro ou de l'unité, certaines interpolations devenant pénibles ou même impraticables, nous les avons remplacées par l'usage des nombres auxiliaires contenus dans les colonnes α et β, et dont nous allons expliquer la signification.

D'après la formule (7) du n° **1371**, le nombre q est déterminé par une série très-convergente pour les petites valeurs du module k, série dont le premier terme est $\frac{k^2}{16}$. Donc la valeur de q est alors très-

peu différente de $\frac{k^2}{16}$, et son logarithme pourra s'obtenir en ajoutant à $\log\frac{k^2}{16}$ une petite correction que nous désignons par α, et dont les valeurs se prêtent aisément à l'interpolation.

Exemple. — Pour $\theta = 0^q,2573$, calculer $\log q$ et $\log q'$ (¹).

La Table nous donne d'abord, pour cette valeur de θ,

$$\log k = \log \sin\theta = \bar{1},5945,$$

d'où

$$\log\frac{k^2}{16} = \bar{3},9850.$$

On a ensuite, en dix-millièmes,

$$\alpha = 339 + 28 \times 0,73 = 359,$$

d'où résulte

$$\log q = \log\frac{k^2}{16} + \alpha = \bar{2},0209.$$

Maintenant, M étant le module des logarithmes décimaux, on a [1337] la relation

$$\log\frac{1}{q}\log\frac{1}{q'} = M^2\pi^2,$$

d'où l'on tire

$$\log\log\frac{1}{q'} = \log M^2\pi^2 - \log\log\frac{1}{q} = \bar{1},97340,$$

et par suite $\log q' = \bar{1},0594$.

1400. Pour des valeurs très-petites du module k, le quadrant elliptique complémentaire K' prend des valeurs très-grandes et qui varient rapidement avec k. Mais on peut en faciliter beaucoup le calcul au moyen d'une formule d'approximation, donnée par Legendre, et dont nous empruntons la démonstration à une Note de M. Darboux.

(¹) Il est à peine besoin d'avertir que les logarithmes qui figurent dans tous ces calculs numériques sont des logarithmes *décimaux*.

Si l'on pose

$$f(z, k') = \frac{1}{\sqrt{1+z}\sqrt{1+k'z}},$$

l'intégrale

$$K' = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}\sqrt{1-k'^2z^2}}$$

pourra s'écrire sous la forme

$$\int_0^1 \frac{f(z, k')\,dz}{\sqrt{1-z}\sqrt{1-k'z}},$$

ou, en ajoutant et retranchant, au numérateur, la quantité

$$f(1, k')\,dz = \frac{dz}{\sqrt{2(1+k')}},$$

$$K' = f(1, k')\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z}\sqrt{1-k'z}} - \int_0^1 \frac{[f(1, k') - f(z, k')]\,dz}{\sqrt{1-z}\sqrt{1-k'z}}.$$

Si dans la seconde intégrale on suppose $k' = 1$, cette intégrale se réduit à

$$-\int_0^1 \frac{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1+z}\right)}{1-z}\,dz = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dz}{1+z} = \frac{1}{2}\log 2.$$

Donc, pour k très-petit et k' très-voisin de l'unité, la seconde intégrale différera très-peu de $\frac{1}{2}\log 2$ et pourra se représenter sous la forme

$$\frac{1}{2}\log 2 + \varepsilon,$$

ε étant infiniment petit avec k.

La première intégrale a pour valeur

$$\sqrt{\frac{2}{k'(1+k')}}\log\frac{\sqrt{1+k'}\left(1+\sqrt{k'}\right)}{k},$$

et sa limite, pour k' tendant vers l'unité, est celle de

$$\log\frac{2\sqrt{2}}{k} = \frac{3}{2}\log 2 + \log\frac{1}{k}.$$

Donc la somme des deux termes de la valeur de K' peut s'exprimer par la formule

$$K' = \log \frac{4}{k} + \varepsilon,$$

ε étant infiniment petit en même temps que k.

Donc, pour k très-petit, le logarithme de K' différera très-peu de $\log \log \frac{4}{k}$, et s'obtiendra en ajoutant à cette dernière quantité une correction β, indiquée dans une colonne de la Table I.

Si les logarithmes sont décimaux, comme ceux de la Table, il faudra ajouter au logarithme décimal de $\frac{4}{k}$ le logarithme de $\frac{1}{M}$.

Soit, par exemple, $\theta = 0^q,0458$; on aura

$$\log \frac{4}{k} = \log(4 \operatorname{cos\acute{e}c} \theta) = 1,7454,$$

d'où l'on tire

$$\begin{array}{ll} \log \log \frac{4}{k} & = 0,2419 \\ \log \frac{1}{M} & = 0,3622 \\ \beta & = 0,0004 \\ \hline \log K' & = 0,6045 \end{array}$$

1401. La Table II fait connaître, pour les diverses valeurs de l'amplitude et de l'angle du module, les valeurs, tant naturelles que logarithmiques, des intégrales elliptiques de première et de seconde espèce.

Pour les petites valeurs de l'amplitude et du module, l'interpolation s'effectue plus facilement en faisant usage des valeurs naturelles. C'est le contraire qui a lieu pour les grandes valeurs des deux arguments, surtout lorsqu'il s'agit des intégrales de première espèce. Aussi avons-nous, pour ces dernières, donné à la Table de leurs valeurs logarithmiques une plus grande extension, en calculant cette Table pour chaque centième du quadrant, à partir de la valeur $0^q,90$ de chacun des angles φ et θ.

Notre Table étant à deux arguments, et les intervalles se trouvant trop considérables pour qu'on puisse, dans l'interpolation,

négliger les différences secondes, nous allons indiquer en quelques mots comment on doit y avoir égard.

Soit $u = f(\varphi, \theta)$ une fonction de deux variables, dont on possède une Table construite pour des intervalles constants des valeurs de chacune des variables. Pour simplifier les calculs, nous prendrons ces deux intervalles pour les unités auxquelles les variables respectives seront rapportées. Dans le cas actuel, l'unité à laquelle seront rapportés les angles φ et θ sera le dixième du quadrant.

Proposons-nous de calculer, au moyen de cette Table, la valeur de

$$u = f(\varphi_0 + h, \ \theta_0 + g),$$

φ_0 et θ_0 étant les valeurs tabulaires les plus voisines des valeurs φ et θ, de sorte que h et g soient des nombres moindres que l'unité.

En développant, par le théorème de Taylor, l'expression de u, et négligeant les puissances et les produits des accroissements h, g, d'ordres supérieurs au second, on aurait une expression de la forme

$$\begin{aligned} u = a + a' h + a'' h^2 & \\ + a_1 g + a'_1 hg & \\ + a_{11} g^2. & \end{aligned}$$

En donnant tour à tour aux accroissements h, g les valeurs 0, 1, 2, et désignant par u_{mn} la valeur que prend u pour $h = m$ et $g = n$, on pourra déterminer les coefficients a, a', a_1, ... au moyen de u_{00} et des différences du premier et du second ordre de la fonction u, relatives à cette valeur.

En désignant par Δ_φ, $\Delta_{\varphi\varphi}$ les différences première et seconde relatives à la seule variation de φ, par $\Delta_{\varphi\theta}$ la différence seconde relative à la variation de φ et de θ, et ainsi de suite, on trouvera, pour valeurs des coefficients,

$$a = u_{00}, \quad a' = \Delta_\varphi - \frac{1}{2}\Delta_{\varphi\varphi}, \quad a_1 = \Delta_\theta - \frac{1}{2}\Delta_{\theta\theta},$$

$$a'' = \frac{1}{2}\Delta_{\varphi\varphi}, \quad a'_1 = \Delta_{\varphi\theta}, \quad a_{11} = \frac{1}{2}\Delta_{\theta\theta},$$

et, par conséquent,

$$\begin{aligned} f(\varphi_0 + h, \ \theta_0 + g) = u_{00} + h\left(\Delta_\varphi - \frac{1-h}{2}\Delta_{\varphi\varphi} + g\Delta_{\varphi\theta}\right) & \\ + g\left(\Delta_\theta - \frac{1-g}{2}\Delta_{\theta\theta}\right). & \end{aligned}$$

Pour résoudre le problème inverse de calculer l'un des arguments, connaissant l'autre et la valeur correspondante de la fonction, on se servira de la même équation, dont on pourra obtenir la solution par approximations successives.

Exemples. — I. Calculer $F(\varphi)$ pour $\varphi = 0^q,7444$ et $\theta = 0^q,6778$.

En prenant $\varphi_0 = 0^q,7$, $\theta_0 = 0^q,6$, on formera le Tableau suivant des valeurs tabulaires de $F(\varphi)$ et de leurs différences :

	1,2575	1,3118	1,3664
	1,4939	1,5886	
	1,7481		
Diff. 1res	2364	543	546
	2542	947	
Diff. 2es	$\Delta_{\varphi\varphi} = 178$,	$\Delta_{\varphi\theta} = 404$,	$\Delta_{\theta\theta} = 3$
	$h = 0,444$,	$g = 0,778$	

Δ_φ	2364
$-\frac{1}{2}(1-h)\Delta_{\varphi\varphi}$ —	49
$g\Delta_{\varphi\theta}$	314
Δ_φ corrigé....	2629
Δ_θ	543
$-\frac{1}{2}(1-g)\Delta_{\theta\theta}$ —	0
Δ_θ corrigé....	543

u_{00}	1,2575
Δ_φ corr. $\times h$ ..	1167
Δ_θ corr. $\times g$ ..	422
$u_{\varphi\theta}$	1,4164
Les Tables de Legendre donnent	
$u_{\varphi\theta} =$	1,4140

II. Étant donnés $\theta = 0^q,5621$ et $\log E(\varphi) = \bar{1},8065$, trouver la valeur de φ.

Ici $\varphi_0 = 0^q,4$, $\theta_0 = 0^q,5$, $g = 0,621$.

Valeurs.	$\bar{1}$,7844	7799	7757
	8740	8669	
	9448		
Diff. 1res	896	−45	−42
	708	−71	
Diff. 2es.	−188	−26	+3

Δ_φ	896
$g\Delta_{\varphi\theta}$ .... —	16
δ_φ	880
Δ_θ ....—	45
$-\frac{1-g}{2}\Delta_{\theta\theta}$ ... —	1
Δ_θ corrigé....—	46

$u_{\varphi\theta}$	$\bar{1}$,8085
$-u_{00}$	$-\bar{1}$,7844
$-\Delta_\theta$ corr. $\times g$ +	29
Reste = R....	250
$\frac{R}{\delta_\varphi} =$	0,2841

L'inconnue h est donnée par l'équation

$$h = \frac{R}{\delta_\varphi} + \frac{h(1-h)}{2}\,\frac{\Delta_{\varphi\varphi}}{\delta_\varphi} = 0,2841 - h(1-h) \times 0,1078.$$

En prenant pour première approximation $h = 0,28$, d'où

$$h(1-h) = 0,2016,$$

on a, pour seconde valeur approchée,

$$h = 0,2625.$$

TABLE I. — Fonctions du module.

$\log k$	θ	$\log K$	$\log \frac{2K}{\pi}$	$\log q$	α	$\log E$	$\log E'$	$\log q'$	$\log \frac{2K'}{\pi}$	β	$\log K'$	$\frac{\pi}{2} - \theta$	$\log k'$
	$0,^{q}$	0,				0,	0,				0,		
»	**00**	1961	0	»	0	1961	0000	0,0000	∞	0	∞	**100**	0,0000
$\bar{2}$,1961	**01**	1961	0	$\bar{5}$,1881	1	1961	0003	$\bar{1}$,6131	5474	0	7435	**99**	$\bar{1}$,9999
4971	**02**	1962	1	$\bar{5}$,7903	2	1960	0009	5578	4894	1	6855	**98**	9998
6731	**03**	1964	2	$\bar{4}$,1425	5	1959	0019	5174	4516	2	6477	**97**	9995
7979	**04**	1965	4	3925	9	1957	0031	4840	4227	3	6188	**96**	9991
$\bar{2}$,8946	**05**	1968	7	$\bar{4}$,5865	13	1955	0046	$\bar{1}$,4547	3989	5	5951	**95**	$\bar{1}$,9987
$\bar{2}$,9736	**06**	1971	10	7451	19	1952	0062	4281	3786	7	5747	**94**	9981
$\bar{1}$,0403	**07**	1974	13	8792	26	1948	0081	4035	3606	9	5568	**93**	9974
0981	**08**	1978	17	$\bar{4}$,9954	34	1944	0100	3804	3446	12	5407	**92**	9966
1489	**09**	1983	22	$\bar{3}$,0981	43	1940	0122	3585	3299	15	5260	**91**	9956
$\bar{1}$,1943	**10**	1988	27	$\bar{3}$,1899	54	1934	0144	$\bar{1}$,3376	3165	19	5126	**90**	$\bar{1}$,9946
2353	**11**	1994	33	2731	65	1929	0168	3174	3040	22	5001	**89**	9935
2727	**12**	2000	39	3491	77	1923	0193	2978	2923	26	4885	**88**	9922
3070	**13**	2007	45	4190	91	1916	0219	2787	2814	30	4775	**87**	9909
3387	**14**	2014	53	4839	105	1909	0245	2602	2711	35	4672	**86**	9894
$\bar{1}$,3682	**15**	2022	61	$\bar{3}$,5444	121	1901	0273	$\bar{1}$,2419	2613	39	4574	**85**	$\bar{1}$,9878
3957	**16**	2030	69	6010	138	1893	0301	2240	2520	44	4481	**84**	9861
4214	**17**	2039	78	6542	156	1884	0329	2064	2432	49	4393	**83**	9843
4456	**18**	2049	88	7045	175	1875	0359	1890	2347	55	4308	**82**	9824
4684	**19**	2059	98	7522	195	1865	0388	1719	2266	60	4227	**81**	9804
$\bar{1}$,4900	**20**	2069	108	$\bar{3}$,7974	216	1854	0418	$\bar{1}$,1548	2188	66	4149	**80**	$\bar{1}$,9782
5104	**21**	2081	120	8406	238	1843	0448	1380	2114	72	4075	**79**	9759
5299	**22**	2093	131	8818	262	1832	0479	1212	2042	78	4003	**78**	9735
5484	**23**	2105	144	9212	286	1820	0510	1045	1972	84	3934	**77**	9710
5660	**24**	2118	157	9591	312	1807	0541	0879	1906	91	3867	**76**	9684
$\bar{1}$,5828	**25**	2131	170	$\bar{3}$,9954	339	1794	0572	$\bar{1}$,0714	1841	97	3802	**75**	$\bar{1}$,9656
5990	**26**	2146	184	$\bar{2}$,0305	367	1781	0603	0548	1779	104	3740	**74**	9627
6144	**27**	2160	199	0642	396	1767	0635	0384	1718	111	3679	**73**	9597
6292	**28**	2176	214	0969	426	1752	0666	0219	1660	118	3621	**72**	9566
6434	**29**	2192	230	1284	458	1737	0697	$\bar{1}$,0054	1603	125	3564	**71**	9533
$\bar{1}$,6570	**30**	2208	247	$\bar{2}$,1590	490	1721	0728	$\bar{2}$,9888	1548	133	3509	**70**	$\bar{1}$,9499
6702	**31**	2225	264	1887	524	1705	0759	9723	1495	140	3456	**69**	9463
6828	**32**	2243	282	2175	559	1689	0790	9557	1443	148	3404	**68**	9427
6950	**33**	2262	300	2454	596	1671	0821	9390	1393	155	3354	**67**	9388
7068	**34**	2281	320	2727	633	1654	0852	9223	1344	163	3305	**66**	9349
$\bar{1}$,7181	**35**	2300	339	$\bar{2}$,2992	672	1636	0883	$\bar{2}$,9055	1296	171	3258	**65**	$\bar{1}$,9308
7290	**36**	2321	360	3251	712	1617	0913	8886	1250	179	3211	**64**	9265
7396	**37**	2342	381	3503	753	1598	0943	8716	1205	187	3167	**63**	9221
7498	**38**	2364	402	3750	795	1578	0973	8544	1162	195	3123	**62**	9175
7597	**39**	2386	425	3991	839	1558	1002	8372	1119	203	3080	**61**	9128
$\bar{1}$,7692	**40**	2409	448	$\bar{2}$,4227	884	1537	1032	$\bar{2}$,8198	1078	211	3039	**60**	$\bar{1}$,9080
7785	**41**	2433	472	4458	930	1516	1061	8023	1038	219	2999	**59**	9029
7874	**42**	2458	496	4684	978	1495	1089	7846	998	228	2960	**58**	8977
7960	**43**	2483	522	4906	1027	1473	1118	7667	960	236	2921	**57**	8923
8044	**44**	2509	548	5124	1077	1450	1146	7486	923	244	2884	**56**	8868
$\bar{1}$,8125	**45**	2536	574	$\bar{2}$,5338	1129	1427	1173	$\bar{2}$,7304	887	252	2848	**55**	$\bar{1}$,8810
8204	**46**	2563	602	5549	1182	1404	1200	7119	852	261	2813	**54**	8751
8280	**47**	2591	630	5755	1236	1380	1227	6932	817	269	2779	**53**	8690
8354	**48**	2621	659	5959	1292	1355	1254	6743	784	277	2745	**52**	8627
8426	**49**	2651	689	6159	1349	1331	1280	6551	752	285	2713	**51**	8562
$\bar{1}$,8495	**50**	2681	720	$\bar{2}$,6356	1408	1305	1305	$\bar{2}$,6356	720	294	2681	**50**	$\bar{1}$,8495
		0,				0,	0,				0,	**$0,^{q}$**	
$\log k'$	$\frac{\pi}{2} - \theta$	$\log K'$	$\log \frac{2K'}{\pi}$	$\log q'$	α	$\log E'$	$\log E$	$\log q$	$\log \frac{2K}{\pi}$	β	$\log K$	θ	$\log k$

Pour k très-petit :

$$\log q = \log \frac{k^2}{16} + \alpha, \qquad \log \frac{1}{16} = \bar{2},7958\ 8002;$$

$$\log q' = \frac{M^2\pi^2}{\log q}, \qquad \log M^2\pi^2 = 0,2698\ 6837;$$

$$\log K' = \log\left(\log \frac{4}{k}\right) + \log \frac{1}{M} + \beta, \qquad \log \frac{1}{M} = 0,3622\ 1569.$$

TABLE II. — Intégrales de première espèce.

Valeurs naturelles de $u = F(\varphi)$.

am $u = \varphi$	$\theta = 0^q{,}0$	$0^q{,}1$	$0^q{,}2$	$0^q{,}3$	$0^q{,}4$	$0^q{,}5$	$0^q{,}6$	$0^q{,}7$	$0^q{,}8$	$0^q{,}9$	$1^q{,}0$
$0^q{,}0$	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1	1571	1571	1571	1572	1573	1574	1575	1576	1577	1577	1577
2	3142	3143	3146	3152	3159	3167	3176	3183	3189	3193	3195
3	4712	4716	4728	4747	4772	4800	4829	4856	4878	4892	4897
4	6283	6293	6320	6365	6423	6491	6563	6633	6690	6729	6743
$0^q{,}5$	0,7854	0,7872	0,7924	0,8009	0,8123	0,8260	0,8411	0,8561	0,8692	0,8781	0,8814
6	9425	9454	9540	9682	9879	1,0124	1,0405	1,0700	1,0971	1,1169	1,1242
7	1,0996	1,1039	1,1168	1,1386	1,1694	2093	2575	3118	3664	4097	4268
8	2566	2626	2807	3116	3564	4167	4939	5886	6964	7972	8427
9	4137	4215	4454	4866	5478	6328	7481	9028	2,1094	2,3685	2,5421
$1^q{,}0$	1,5708	1,5805	1,6105	1,6627	1,7415	1,8541	2,0133	2,2435	2,5998	3,2553	log ∞

Valeurs logarithmiques de $u = F(\varphi)$.

am $u = \varphi$	$\theta = 0^q{,}0$	$0^q{,}1$	$0^q{,}2$	$0^q{,}3$	$0^q{,}4$	$0^q{,}5$	$0^q{,}6$	$0^q{,}7$	$0^q{,}8$	$0^q{,}9$	$1^q{,}0$
$0^q{,}0$	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
1	$\bar{1}$,1961	1962	1963	1965	1967	1970	1973	1975	1977	1979	1979
2	4971	4973	4978	4986	4996	5007	5018	5029	5037	5042	5044
3	6732	6736	6747	6765	6787	6812	6838	6863	6882	6895	6899
4	7982	7988	8007	8038	8077	8123	8171	8217	8255	8280	8288
$0^q{,}5$	$\bar{1}$,8951	8961	8989	9036	9097	9170	9248	9325	9391	9436	9452
6	9743	9756	9795	9860	9947	*0053	*0172	*0294	*0403	*0480	*0508
7	0,0412	0429	0480	0564	0680	0825	0995	1179	1356	1491	1544
8	0992	1013	1074	1178	1324	1513	1743	2010	2295	2546	2655
9	1504	1528	1600	1722	1897	2129	2426	2794	3242	3745	4052
$1^q{,}0$	0,1961	1988	2069	2208	2409	2681	3039	3509	4149	5126	∞

am $u = \varphi$	$\theta = 0^q{,}90$	$0^q{,}91$	$0^q{,}92$	$0^q{,}93$	$0^q{,}94$	$0^q{,}95$	$0^q{,}96$	$0^q{,}97$	$0^q{,}98$	$0^q{,}99$	$1^q{,}00$
$0^q{,}90$	0,3745	3793	3839	3883	3923	3960	3991	4017	4036	4048	4052
91	3877	3930	3982	4032	4078	4120	4157	4187	4210	4224	4229
92	4012	4071	4130	4186	4239	4288	4332	4368	4396	4413	4418
93	4148	4215	4281	4345	4407	4465	4517	4561	4595	4616	4624
94	4287	4362	4436	4510	4582	4651	4714	4769	4812	4840	4849
$0^q{,}95$	0,4428	4511	4595	4680	4765	4848	4926	4995	5051	5088	5101
96	4569	4662	4757	4855	4955	5055	5152	5243	5319	5372	5391
97	4710	4813	4921	5033	5150	5272	5395	5517	5626	5707	5738
98	4851	4965	5085	5213	5350	5497	5654	5818	5984	6124	6184
99	4990	5114	5248	5392	5550	5725	5921	6145	6401	6683	6854
$1^q{,}00$	0,5126	5260	5407	5568	5747	5951	6188	6477	6855	7435	∞

TABLE III. — Intégrales de seconde espèce.

Valeurs naturelles de $E(\varphi)$.

am $u = \varphi$	$\theta = 0^q{,}0$	$0^q{,}1$	$0^q{,}2$	$0^q{,}3$	$0^q{,}4$	$0^q{,}5$	$0^q{,}6$	$0^q{,}7$	$0^q{,}8$	$0^q{,}9$	$1^q{,}0$
$0^q{,}0$	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1	1571	1571	1570	1569	1569	1568	1567	1566	1565	1565	1564
2	3142	3140	3137	3131	3124	3116	3108	3101	3095	3091	3090
3	4712	4708	4696	4678	4654	4628	4601	4576	4557	4544	4540
4	6283	6274	6247	6204	6149	6087	6024	5966	5919	5888	5878
$0^q{,}5$	0,7854	0,7836	0,7785	0,7704	0,7600	0,7482	0,7360	0,7246	0,7153	0,7092	0,7071
6	9425	9396	9312	9179	9006	8806	8598	8401	8237	8129	8090
7	1,0996	1,0953	1,0828	1,0627	1,0365	1,0060	9736	9423	9156	8975	8910
8	2566	2507	2333	2053	1685	1250	1,0780	1,0315	9907	9617	9511
9	4137	4060	3831	3463	2974	2391	1751	1102	1,0507	1,0057	9877
$1^q{,}0$	1,5708	1,5611	1,5326	1,4864	1,4248	1,3506	1,2681	1,1826	1,1011	1,0338	1,0000

Valeurs logarithmiques de $E(\varphi)$.

am $u = \varphi$	$\theta = 0^q{,}0$	$0^q{,}1$	$0^q{,}2$	$0^q{,}3$	$0^q{,}4$	$0^q{,}5$	$0^q{,}6$	$0^q{,}7$	$0^q{,}8$	$0^q{,}9$	$1^q{,}0$
$0^q{,}0$	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
1	$\bar{1}$,1961	$\bar{1}$,1961	$\bar{1}$,1960	$\bar{1}$,1958	$\bar{1}$,1955	$\bar{1}$,1952	$\bar{1}$,1950	$\bar{1}$,1947	$\bar{1}$,1945	$\bar{1}$,1944	$\bar{1}$,1943
2	4971	4970	4965	4957	4947	4936	4925	4915	4907	4902	4900
3	6732	6729	6718	6700	6678	6654	6628	6605	6587	6575	6570
4	7982	7975	7956	7926	7888	7844	7799	7757	7722	7700	7692
$0^q{,}5$	$\bar{1}$,8951	$\bar{1}$,8941	$\bar{1}$,8913	$\bar{1}$,8867	$\bar{1}$,8808	$\bar{1}$,8740	$\bar{1}$,8669	$\bar{1}$,8601	$\bar{1}$,8545	$\bar{1}$,8508	$\bar{1}$,8495
6	9743	9729	9691	9628	9545	9448	9344	9243	9158	9100	9080
7	0,0412	0,0395	0,0345	0,0264	0,0156	0,0026	9884	9742	9617	9530	9499
8	0992	0972	0911	0811	0676	0511	0,0326	0,0135	9959	9831	9782
9	1504	1480	1409	1291	1131	0931	0701	0454	0,0215	0,0024	9946
$1^q{,}0$	0,1961	0,1934	0,1854	0,1721	0,1537	0,1305	0,1032	0,0728	0,0418	0,0144	0,0000

Une troisième approximation donnerait

$$h = 0{,}2634,$$

d'où l'on conclut, pour la valeur cherchée,

$$\varphi = 0^q{,}4263.$$

Les Tables de Legendre donneraient $\varphi = 0^q{,}4257$.

FIN DU TOME QUATRIÈME ET DERNIER.

TABLE DES MATIÈRES.

LIVRE SIXIÈME.

THÉORIE DES FONCTIONS D'UNE VARIABLE COMPLEXE. — APPLICATIONS A LA THÉORIE DES FONCTIONS ELLIPTIQUES.

(SUITE.)

CHAPITRE II.

Applications des théories précédentes.

CHAPITRE III.

Théorie des fonctions multiformes.

CHAPITRE IV.

Des fonctions elliptiques.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DU TOME QUATRIÈME ET DERNIER.

3202 Paris. — Imprimerie de Gauthier-Villars, quai des Augustins, 55.



